慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分					
令和 04 年 01 月 26 日 (水) 3 時限施行		学部　学科　年　組				
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	経済数学 II	氏　名				

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　多変数関数の微分と関数値の大小に関する講義 pdf と教科書の既出事項についての以下の小問に答えよ．答案用紙は裏を用いずおもて面に簡潔に書くこと．

i) $f(x_1,x_2)=10-3x_1^2-2x_2^2$ で定義される平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の点 $(-1,-1)\in\mathbb{R}^2$ における $(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{R}^2$ 方向の増加率

$$R(\theta)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h\cos\theta,-1+h\sin\theta)-f(-1,-1)}{h}$$

が θ の関数として最大になる θ の値を θ_0 とする．大きさが $R(\theta_0)$ に等しく向きが $(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$ のベクトル $\overrightarrow{w}_0$ と，$n=1,2,3$ について $R(\theta_0+\dfrac{n}{2}\pi)$ の 3 つの実数を求めよ．答だけでなく計算または理由も簡潔に書くこと．答のみの答案は採点しない．講義 pdf または教科書の定理等を用いてもよい．

ii) ある不等式条件下の最小値問題の Fritz–John 条件を書いたところ次のとおりであった．

$$\begin{cases}\mu_0(-2x_1e^{-x_1^2-x_2^2}+3x_1^2x_2+1)+8\mu_1x_1+\mu_2(x_2+1)=0,\\ \mu_0(-2x_2e^{-x_1^2-x_2^2}+x_1^3)+10\mu_1x_2+\mu_2(x_1+1)=0,\\ \boxed{},\\ \mu_0\geqq 0,\ \mu_1\geqq 0,\ \mu_2\geqq 0,\ (\mu_0,\mu_1,\mu_2)\neq(0,0,0).\end{cases}$$

最小値を求めたい関数 f の具体形を求め，かつ Fritz–John 条件が完成するように空欄を埋めよ．ただし空欄の中に μ_0 は入っていない．答は $\underline{f(x_1,x_2)=\cdots,\ \boxed{\cdots=\cdots=0}}$ のように書け．可能な答が複数あるときは 1 組選んで答えよ．答のみでよい．

問２．　m を自然数とする．講義 pdf によれば m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ の部分集合 $S\subset\mathbb{R}^m$ が凸集合であるとは，$(\forall\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S)(\forall 0<\lambda<1)\ \lambda\overrightarrow{x}+(1-\lambda)\overrightarrow{y}\in S$ が成り立つことを言う．平面 $\mathbb{R}^2$ の円（この問では円などは円の内部と周の集合の意味）や 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の球が凸集合の例であることも講義 pdf や教科書に例示されている．また分離定理とは $A\subset\mathbb{R}^m$ と $B\subset\mathbb{R}^m$ が，A も B も凸集合で $A\cap B=\emptyset$ を満たすならば，

$\overrightarrow{x}\in A\ \Rightarrow\ (\overrightarrow{x},\overrightarrow{p})\geqq\alpha$ と $\overrightarrow{y}\in B\ \Rightarrow\ (\overrightarrow{y},\overrightarrow{p})\leqq\alpha$

を満たす $\overrightarrow{p}\in\mathbb{R}^m$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ がある，という定理である．ここで $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ は内積を表す．凸集合と分離定理についての以下の小問に答えよ．答案用紙は裏を用いずおもて面に簡潔に書くこと．

i) 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の中の，原点を中心とする半径 1 の円を A と置く．すなわち $A\subset\mathbb{R}^2$ を $A=\{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^2\mid\|\overrightarrow{x}\|\leqq 1\}$ で定義する．同様に横軸上の原点を中点とする長さ 6 の線分を底辺とし高さ 6 の 2 等辺三角形を B と置く．すなわち $B=\{\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x_2\geqq 0,\ x_2\leqq 6-2x_1,\ x_2\leqq 6+2x_1\}$ である．A と B を用いて $C\subset\mathbb{R}^2$ を $C=\{\overrightarrow{w}-\overrightarrow{z}\in\mathbb{R}^2\mid\overrightarrow{w}\in A,\ \overrightarrow{z}\in B\}$ で定義するとき，C が凸集合であることの証明の書き出しが『$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in C$ およ

び $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C$ および $0 < \lambda < 1$ とする．C の定義から $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}$ と $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{w}' - \overrightarrow{z}'$ を満たす $\overrightarrow{w} \in A$, $\overrightarrow{w}' \in A$, $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in B$, $\overrightarrow{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \in B$, がある．』となっているとき，続きを答えて証明を完成せよ．本問の最初のほうにある定義や例や定理は断らずに用いてよい．答案用紙は全く同様の証明の方法を繰り返す場合に**2 度目以降**については「同様に」として省略するなど簡潔に書くことで答案用紙の**裏を用いずに**おもて面に 10 行程度に収めよ．

ii) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の共有点を持たない 2 つの凸集合 $A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geqq 4\}$ と $B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 \leqq 1\}$ について，
$\overrightarrow{x} \in A$ ならば $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{p}) \geqq 0$，および $\overrightarrow{y} \in B$ ならば $(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{p}) \leqq 0$,
を満たす B 上の点 $\overrightarrow{y}_0 \in B$ と $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ を答えよ．複数ある場合は 1 組答えよ．さらに，その答が問の冒頭に紹介した分離定理において α をどう選んだことになるかを答えよ．答案用紙は答のみでよい．

iii) n と m を自然数とし，H を $n \times m$ 行列であってその転置行列 ${}^tH$ について ${}^tH\overrightarrow{y}$ が全成分負になる $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ がないものとする．$A = \{{}^tH\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n\}$ と置き $B \subset \mathbb{R}^m$ を全成分負の m 次元ベクトルをすべて集めた集合とすると，今 H について置いた仮定から分離定理の仮定が成り立つので分離定理から，
$\overrightarrow{x} \in A \ \Rightarrow\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \geqq \alpha$ と $\overrightarrow{x} \in B \ \Rightarrow\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \leqq \alpha$
が成り立つ $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ と実数 α がある．集合 B と A の性質から $\alpha = 0$ がわかる．
以上を認めてこのとき $H\overrightarrow{p} = 0$ が成り立つことを（分離定理は上記のように不等号しか言ってないはずなのに等号が言える理由が明確になるように）証明せよ．答案用紙は裏を用いずおもて面に 5 行程度以内で簡潔に書くこと．

問 3 ． （未記入ならば）**答案用紙表右上余白に登録した時限（3 または 4）を大きく書け．** また,（未記入ならば）答案用紙所定欄に学籍番号と氏名を明瞭に書け.

経済数学 II　期末試験　**略解**　　　　　　　　　　　　　　　2022/01/26 服部哲弥

問 1 (40).

i) 【講義 pdf 1の問の類題】$\overrightarrow{\nabla} f(x_1,x_2)=(-6x_1,-4x_2)$．講義 pdf 1の問の略解から $\underline{\overrightarrow{w}_0=\overrightarrow{\nabla} f(-1,-1)=(6,4)}$．勾配ベクトルの方向が f の増大度が最大なので逆向きは最小で直交する方向は等高線の方向だから，$\underline{R(\theta_0+\frac{1}{2}\pi)=0}$，$\underline{R(\theta_0+\pi)=-\sqrt{6^2+4^2}=-\sqrt{52}}$，$\underline{R(\theta_0+\frac{3}{2}\pi)=0}$，

別解．具体的に計算すると $R(\theta)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h\cos\theta,-1+h\sin\theta)-f(-1,-1)}{h}=6\cos\theta+4\sin\theta$ なので，$\cos\theta_0=\dfrac{6}{\sqrt{52}}$ と $\sin\theta_0=\dfrac{4}{\sqrt{52}}$ を満たす θ_0 を選ぶと，$R(\theta)=\sqrt{52}\cos(\theta-\theta_0)$ だから $\theta=\theta_0$ で最大値を取り，$R(\theta_0)=\sqrt{52}$．$(\cos\theta_0,\sin\theta_0)=(\dfrac{6}{\sqrt{52}},\dfrac{4}{\sqrt{52}})$ と定めたから，$\underline{\overrightarrow{w}_0=(6,4)}$，他も具体的に計算できて $\underline{R(\theta_0+\frac{1}{2}\pi)=0}$，$\underline{R(\theta_0+\pi)=-\sqrt{6^2+4^2}=-\sqrt{52}}$，$\underline{R(\theta_0+\frac{3}{2}\pi)=0}$，

ii) 【講義 pdf 2の問（FJ 条件）の類題と Gordan の定理との特定 2 点での記号対応】
$\underline{f(x_1,x_2)=e^{-x_1^2-x_2^2}+x_1^3x_2+x_1+C_1}$，
$\underline{\boxed{\mu_1(4x_1^2+5x_2^2-C_2)=\mu_2(x_1x_2+x_1+x_2-C_3)=0}}$．
C_1, C_2, C_3 はそれぞれ定数であれば可とする．

問 2 (60).

i) 【講義 pdf 10の問（閉集合）】（『問題文』の続き）よって

$$
\begin{aligned}
\lambda\overrightarrow{x}+(1-\lambda)\overrightarrow{y}&=(\lambda\overrightarrow{w}+(1-\lambda)\overrightarrow{w'})-(\lambda\overrightarrow{z}+(1-\lambda)\overrightarrow{z'})\\
&=(\lambda\overrightarrow{w}+(1-\lambda)\overrightarrow{w'})-\begin{pmatrix}\lambda z_1+(1-\lambda)z_1'\\ \lambda z_2+(1-\lambda)z_2'\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．問題冒頭の例によって円 A は凸集合で，$\overrightarrow{w}\in A$ および $\overrightarrow{w}'\in A$ なので $\lambda\overrightarrow{w}+(1-\lambda)\overrightarrow{w}'\in A$ である．次に，$\overrightarrow{z}\in B$ および $\overrightarrow{z}'\in B$ なので B を定義する不等式の 1 つから $z_2\geqq 0$ および $z_2'\geqq 0$ であり $0<\lambda<1$ なので $\lambda z_2+(1-\lambda)z_2'\geqq 0$ である．同様に，$\lambda z_2+(1-\lambda)z_2'\leqq 6-2(\lambda z_1-(1-\lambda)z_1')$ および $\lambda z_2+(1-\lambda)z_2'\leqq 6-2(\lambda z_1+(1-\lambda)z_1')$ が成り立つ．よって $\lambda\overrightarrow{z}+(1-\lambda)\overrightarrow{z}'\in B$．以上から $\lambda\overrightarrow{x}+(1-\lambda)\overrightarrow{y}\in C$ となるので C は凸集合である．

ii) 【1 1の問（分離定理）の類題】

$\underline{\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}q\\ q\\ q\end{pmatrix}}$，$\underline{\overrightarrow{y}_0=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}}$，$\underline{\alpha}=(\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})=\underline{(1+\sqrt{3})\,q}$　　（q は正の実数ならばどれでも可）

iii) 【分離定理から Gordan の証明】$\overrightarrow{x}\in A$ とは $\overrightarrow{x}={}^tH\overrightarrow{y}$ の形なので，$\overrightarrow{x}\in A\ \Rightarrow\ (\overrightarrow{x},\overrightarrow{p})\geqq 0$ と合わせると，$(\overrightarrow{y},H\overrightarrow{p})={}^t\overrightarrow{y}H\overrightarrow{p}={}^t\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{p}=(\overrightarrow{x},\overrightarrow{p})\geqq 0$．$\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$ は何でも良いので $\overrightarrow{y}=-H\overrightarrow{p}$ と選ぶと $-\|H\overrightarrow{p}\|^2=(-H\overrightarrow{p},H\overrightarrow{p})=(\overrightarrow{y},H\overrightarrow{p})\geqq 0$ ノルムは非負なのでこれが成り立つのは等号の場合だけだから $\|H\overrightarrow{p}\|=0$．ノルムが 0 のベクトルは零ベクトルだけだから $H\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$．