慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分		

令和 04 年 07 月 27 日 (水) 3 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　講義・講義スライド・教科書の内容に関連する以下の小問それぞれに答えよ．答案用紙は裏を用いずおもて面に簡潔に書くこと．

i) $i=1,2,3$ および $j=1,2,3,4$ に対して (i,j) 成分が $2i+3j$ で与えられる 3 行 4 列の行列を A と置く．3 つの 4 変数関数 g_1 , g_2 , g_3 を $\begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ g_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ で定義し，$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ と置くとき，ヤコビ行列 $\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を計算せよ．答案用紙は**おもて面**に 2 行程度以内の分量で途中の式変形の要点の式を 1 つ選んで，たとえば「$\underline{\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x_1,x_2,x_3,x_4)} = \cdots\ \underline{=\cdots}$」または「$\ldots$に○○の定理を用いると $\cdots = \cdots$ だから $\underline{\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cdots}$」などと答えよ．答だけの答案は採点しない．

ii) a を実数とし，a で決まる 3 次正方実対称行列を $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ と置く．$A(a)$ が不定符号である a の範囲を不等式で答えよ．答案用紙は**おもて面**に 3 行程度以内の理由（根拠）の要点と共に，答を $\underline{a>3}$ のように書け．答だけの答案は採点しない．

iii) 2 変数有理関数 f が $f(x,y) = \dfrac{x^6+y^6+x^5y+x^5+xy^4}{x^4+y^4}$ で定義されているとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を計算せよ．答案用紙は**おもて面**に 4 行程度以内で答の根拠または計算の要点を書いた上で，答を $\underline{f(x,y)=\ldots}$ のように書け．答だけの答案は採点しない．

問２．　I, p_1, p_2, p_3, J を正の実数，$i=1,2,3$ それぞれについて $u_i :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を C^2 級で狭義単調増加で狭義凹関数（特に各 i について導関数 u_i' と $-u_i''$ は各点で正の値をとる）とし，$f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級で狭義単調増加とする．なお非負実数の集合を $\mathbb{R}_+$ と書く．

以下の文章の空欄 (a)–(e) を，文章が（直近の前後だけでなく全体が）正しくつながるように適切な数式で埋めよ．答案用紙は**おもて面**に $\underline{\text{(a)}\ \ldots}$ $\underline{\text{(b)}\ \ldots}$ $\ldots$ のように解答のみを書け．

3 個の財 $i=1,2,3$ を購入する 1 人の（初級ミクロで習うような）消費者を考え，(以下，3 個の財に関する変数の組をまとめて書くときはベクトルの記号を用いて,) 購入量の組を $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in {\mathbb{R}_+}^3$ と置いて，$U(\overrightarrow{x}) = f(u_1(x_1)+u_2(x_2)+u_3(x_3))$ で定義される $U :\ {\mathbb{R}_+}^3 \to \mathbb{R}$ を効用関数，I を予算，各 i について p_i を財 i の価格とする．ここでは初等教科書では扱わない追加の条件として $x_1+x_2=J$，すなわち財 1 と 2 は厳密な代替性があって総和は定まっていると

する．本問だけの用語としてこの等式を代替性の制約条件と呼ぶ．最後に高額のほうを財 1 と呼ぶことにして以下 $p_1 > p_2$ と置く．

ミクロ初級の消費者の行動は，各 i について財 i の購入量 x_i が，予算制約 $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3 = I$ と，代替性の制約 $x_1 + x_2 = J$ の 2 つの等式条件の下で $U(\overrightarrow{x})$ を最大化するように決まり，結果として，独立変数 $I, \overrightarrow{p}$ の 4 変数の関数 $\overrightarrow{x}:\ {\mathbb{R}_+}^4 \to {\mathbb{R}_+}^3$ として定まるとする．（J は本問では変数にせず定数と扱う.）未定乗数法と合成関数の微分などの，等式条件付き極値問題についての経済数学 I の標準的な方法に沿って 3 本の連立偏微分方程式を立て，代替性の制約条件に対応する未定乗数を消去した後に，簡単な移項と加減乗除を行うと，連立偏微分方程式は次のように整理できる：$\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{u_3'(x_3(I, \overrightarrow{p}))}{p_3} = g(I, \overrightarrow{p})$. ここで添字 i によらない，未定乗数や f の微分などの因子をまとめて $g(I, \overrightarrow{p})$ と置いた．空欄 (a) は添字 1 と 2 の式から代替性の制約条件を消去した式に対応する．得られた等式の各辺を I で偏微分した式と，代替性の制約条件の両辺を I で偏微分して得られる $\dfrac{\partial x_2}{\partial I} = -\dfrac{\partial x_1}{\partial I}$ を連立して解くと，

$$\frac{\partial x_1}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \boxed{\text{(b)}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \times \frac{\partial g}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = -\frac{\partial x_2}{\partial I}(I, \overrightarrow{p})$$

および $\dfrac{\partial x_3}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \boxed{\text{(c)}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ を得る．予算制約条件を I で偏微分して得られる $\boxed{\text{(d)}\qquad\qquad\qquad\qquad}$=1 に以上を代入して $\dfrac{\partial g}{\partial I}$ を括り出して整理して解くことで，

$$\frac{\partial g}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \left(\frac{(p_2 - p_1)^2}{\boxed{\text{(e)}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} + \frac{p_3^2}{u_3''(x_3(I, \overrightarrow{p}))} \right)^{-1}$$

を得る．問題冒頭の条件からこれは恒等的に負である．従って，先ほどの x_i たちの I 微分の式と問題冒頭の条件から恒等的に $\dfrac{\partial x_1}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) > 0$, $\dfrac{\partial x_2}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) < 0$, $\dfrac{\partial x_3}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) > 0$ となる．一般に予算が増えれば消費が増えるので I 偏微分が負というのは興味深いとされ，ミクロ初級教科書の用語ではこのモデルの財 2 は劣等財とわかる．

予算制約の条件付き効用最大化問題として消費者の購入行動を説明する考え方はミクロ初級で学ぶ基礎的な考えであり，経済数学で学ぶ内容の数学的裏付けがそれを支える．一方，劣等財のような興味深い消費行動の現象も初級ミクロで種々例示される．そのような特徴的行動は一般論では効用関数の形の違いによるべきだが，一般論はそれを教えない．本問では劣等財を追加的な代替性の制約条件で説明した．直感的には予算以外にカロリーの制約を考えるなどに相当する．個別の現象は効用関数よりもこのようにその特徴を表す数学的に別の問題を考えるほうが良いかもしれない．

経済数学 I　期末試験　**略解**　　　　2022/07/27 服部哲弥

問 1 (50=15*2+20).

i) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$ なので，教科書または講義スライドの問によって

$$\underline{\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla}\,g_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \overrightarrow{\nabla}\,g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \overrightarrow{\nabla}\,g_3(x_1,x_2,x_3,x_4)) \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}}$$

ii) 教科書や講義スライドの問と同様に，線形代数続論の内容に基づいて計算すると，$A(a)$ の固有値は $a,\ a \pm \sqrt{2}$ である．不定符号は正負の固有値の混在であり，$a-\sqrt{2} < a < a+\sqrt{2}$ だから，求める条件は $a-\sqrt{2} < 0 < a+\sqrt{2}$ である．移項して整理すると $\underline{-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}}$.

iii) $g(x,y) = \dfrac{x^6+y^6+x^5y}{x^4+y^4}$ と置くと，$f(x,y) = g(x,y) + x$ だから $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) + x$ が成り立つ．g は講義スライドの 8 の問または教科書 p.10 問 (6) の用語で 2 次同次関数なのでスライドの 8 の問の略解によって Euler の等式が成り立つから $\underline{x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y) + x = \dfrac{2(x^6+y^6+x^5y)+(x^5+xy^4)}{x^4+y^4}}$.

問 2 (50=10*5).　(a) $\dfrac{u_1'(x_1(I,\overrightarrow{p})) - u_2'(x_2(I,\overrightarrow{p}))}{p_1 - p_2}$　(b) $\dfrac{p_1 - p_2}{u_1''(x_1(I,\overrightarrow{p})) + u_2''(x_2(I,\overrightarrow{p}))}$

(c) $\dfrac{p_3}{u_3''(x_3(I,\overrightarrow{p}))}\dfrac{\partial g}{\partial I}(I,\overrightarrow{p})$　(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial x_j}{\partial I}(I,\overrightarrow{p})$　(e) $u_1''(x_1(I,\overrightarrow{p})) + u_2''(x_2(I,\overrightarrow{p}))$