慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50 分	
令和 05 年 02 月 01 日 (水) 6 時限施行		学部　　学科　　年　　組				
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	経済数学 II	氏　名				

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　講義・講義スライド・教科書の内容に関連する以下の小問の空欄 (a)–(f) それぞれを文章の前後が（直近の前後だけでなく文章全体が）正しくつながるように適切な数式で埋めよ．可能な答が複数（無数に）あるときは１組選んで答えよ．答案用紙は**裏を用いず**おもて面に空欄に埋めるべき答だけを (a) $\ldots$ $\ldots$ のように書くこと．

i) 「ヘッセ行列が開凸集合の定義域上で非負定値な実数値関数は定義域上で凸関数である」という定理の，講義（スライド・教科書）の証明を f が $\mathbb{R}$ 上で 2 階導関数 f'' が非負の 1 変数実数値関数の場合に当てはめると次のようになる．
実数 x と y に対してテイラーの定理から，$f(y)-f(x) = f'(x)(y-x)+\dfrac{1}{2}f''(x+(y-x)\theta)(y-x)^2$ となる $0<\theta<1$ がある．f'' が非負だから，不等式 $\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad}$ が x と y について恒等的に成り立つ．
次に実数 x と y と $0<\lambda<1$ を満たす λ に対して $a = \boxed{\text{(b)}\qquad\qquad}$ と置き，空欄 (a) で x と y にそれぞれ a と x を代入した式の λ 倍と，それぞれ a と y を代入した式の $1-\lambda$ 倍を並べる．両者を辺々加えて (b) を代入して整理すると

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geqq f'(a)(\lambda(x-a)+(1-\lambda)(y-a))$$

を得る．右辺は (b) から 0 なので，f が凸関数の定義を満たしていることがわかる．

ii) (u,v) を 2 次元定数ベクトル，2 変数関数 f を平面の点 (a,b) を中心とする円内で C^1 級であるような半径正の円が取れるとする．f の (a,b) での勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ と (u,v) が平面内で鈍角をなす，すなわちこの小問にある変数と記号だけを用いて式で書くと $\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad}$ <0 が成り立つならば，ある正数 t_0 が選べて t_0 未満のどの正数 t に対しても $f(a+ut,b+vt)<f(a,b)$ であることを以下のように証明できる．
1 変数関数 h が原点で微分可能という言葉の正確な定義は（細かい表現の違いはたくさんあるが，1 つの書き方として）次のカギ括弧内の性質を満たすことである：「『$|t|<\delta(\varepsilon)$ ならば $|h(t)-h(0)-c\,t|<\varepsilon\,t$』が，どんな正の実数 ε でも成り立つ正値関数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ があるような，関数 h だけで決まる実定数 c がある．」周知のとおり通常 $c=h'(0)$ と書いて h の原点での微分係数と呼ぶ．多項式は原点で微分可能で微分係数は 1 次の項の係数に等しいことを高校で先取りして学ぶ．他方，講義（スライド・教科書）の多変数関数の合成関数の偏微分の定理によって，小問冒頭の 2 変数関数 f と t の 1 次式たちの合成関数 $h(t)=f(a+ut,b+vt)$ で定義した 1 変数関数 h は原点で微分可能である．このとき，小問冒頭の主張が次のように証明できる：今注意したことからこの h は上記『』内を満たす．存在が保証された $c=h'(0)$ は合成関数の偏微分の定理から空欄 (c) に等しいので負である．『』内で h を f で表し，$\varepsilon = \boxed{\text{(d)}\qquad}$ と選ぶ．高校での絶対値を含む不等式の取り扱いを用いて，$t>0$ や $c<0$ にも注意すると

$f(a+ut, b+vt) - f(a,b) < \boxed{\text{(e)}\qquad\qquad\qquad} < 0$ となって主張を得る.【空欄 (e) は空欄 (d) の選択に応じた量を整理して答えよ. (d) の解答が無い場合は (e) も採点しない.】なお, このとき主張の t_0 として $t_0 = \boxed{\text{(f)}\qquad\qquad}$ と選べる.

問 2 . $f(x,y)=x$, $g_1(x,y)=x^2-y-1$, $g_2(x,y)=y^2-x$ で定義される関数 f, g_1, g_2 について平面内の点 (x_0,y_0) で不等式条件 $g_1 \leqq 0$ と $g_2 \leqq 0$ の下での f の極小値を取るための必要条件である Fritz–John 条件は講義（スライド・教科書）の書き方で,

$$\begin{aligned}
&\mu_0 \overrightarrow{\nabla} f(x_0,y_0) + \mu_1 \overrightarrow{\nabla} g_1(x_0,y_0) + \mu_2 \overrightarrow{\nabla} g_2(x_0,y_0) = (0\ 0),\\
&\mu_1 g_1(x_0,y_0) = \mu_2 g_2(x_0,y_0) = 0,\\
&\mu_0 \geqq 0,\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0,\ (\mu_0,\mu_1,\mu_2) \neq (0,0,0)
\end{aligned}$$

を満たす μ_0, μ_1, μ_2 が存在することである. たとえば不等式条件を満たす平面内の点 $(x_0,y_0)=(0,0)$（原点）で計算すると $\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (1\ 0)$, $\overrightarrow{\nabla} g_1(0,0) = (0\ \ {-1})$, $\overrightarrow{\nabla} g_2(0,0) = (-1\ 0)$ だから $\mu_2 = \mu_0 > 0$ と $\mu_1 = 0$ が Fritz–John 条件を満たす.

このように, 関数と注目する点 (x_0,y_0) を具体的に与えれば Fritz–John 条件の成否は計算でわかるが, 冒頭の定理は不等式条件下の極小値を (x_0,y_0) で取るという事実だけで証明できるという主張であり, 講義（スライド・教科書）はその主張を Gordan の定理を用いて証明した. Gordan の定理によると, 自然数 m と n と, m 個の n 次元ベクトル $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_m$ が与えられたとき, $i=1,\ldots,m$ に対して内積 $(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{y}) < 0$ を同時に満たす n 次元ベクトル $\overrightarrow{y}$ が無ければ, $p_1\overrightarrow{a}_1 + \cdots + p_m\overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}$, $p_i \geqq 0\ (i=1,\ldots,m)$ を満たす $\overrightarrow{p} = (p_1,\ldots,p_m) \neq (0,\ldots,0)$ がある（元の定理は同値条件で書かれているが, 使う向きの主張だけ抜き出した）. 本小問の例では原点で Fritz–John 条件を満たすので, 記号を正しく対応させれば Gordan の定理の仮定が成り立ち, 結論の m 次元ベクトル $\overrightarrow{p}$ が Fritz–John 条件で用いられる. 以下の小問に答えよ.

i) Gordan の定理を用いて証明するには Gordan の定理の仮定にある m と n と $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_m$ を元の問題の変数で表す必要がある. 本小問の冒頭の関数たちの $(x_0,y_0)=(0,0)$ での主張の場合のこれらの変数の値を答えよ. 答案用紙は**裏を用いず**おもて面に答だけを $\underline{n=m=1, \overrightarrow{a}_1 = 1}$ のように**変数に適切な数値を代入して**書くこと.

ii) 前の小問の対応において, Gordan の定理の結論の $p_1,\ldots,p_m$ はそれぞれ元の問題の原点における Fritz–John 条件のどの記号に対応するかを答えよ. 答案用紙は**裏を用いず**おもて面に答だけを $\underline{p_1 = \overrightarrow{\nabla} f(0,0)}$ のように記号で書くこと.

iii) 元の問題の原点における Fritz–John 条件に現れる変数のうち前の 2 つの小問で Gordan の定理の変数と対応がついてないものが残っていればそれを明示して, 元の問題の $(x_0,y_0)=(0,0)$ においてその変数の値を定めよ. 答案用紙は**裏を用いず**おもて面に $\underline{\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = 20}$ のように答を書いた上でそのように置くことができる理由を答案用紙 3 行程度以内で書くこと. 答のみの答案は採点しない.

iv) 元の関数たちについて $(0,0)$ 以外で不等式条件を満たす Fritz-John 条件の解 (x_0,y_0) があればそれをすべて答え, 他に解がなければないことを示す計算を答案用紙 10 行程度以内（用紙上の分量を指しているので, 答案用紙を縦に半分に折って 10 行ずつ 20 行書いても 10 行の計算）で示せ. 原点以外の解がある場合は, その値だけ答えれば良い.

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2023/02/01 服部哲弥

問 1 (20+40).

i) 【凸関数の定義と特徴付け】

(a) $f(y) - f(x) \geqq f'(x)(y-x)$

(b) $\lambda x + (1-\lambda)y$

ii) 【下り坂の補題】

(c) $u\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 【この小問に内積の記号はないので内積の記号で書かれた答えは不可】

【以下 $c = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ と置いてあるが，右辺を代入しても正解.】

(d) $-\dfrac{1}{2}\,c$ 　【$0 < \varepsilon < -c$ を満たす任意の ε で可】

(e) $c\,t - \dfrac{1}{2}\,c\,t = \dfrac{1}{2}\,c\,t$ 　【 (d) で選んだ値を ε と置くとき $(c+\varepsilon)\,t$】

(f) $\delta(-\dfrac{1}{2}\,c)$ 　【 (d) で選んだ値を ε と置くとき $\delta(\varepsilon)$】

問 2 (40). 　【Fritz–John 条件と Gordan の定理の関係】

i) $m = n = 2$, $\vec{a}_1$【$= \vec{\nabla} f(0,0)$】 $= (1\ 0)$, $\vec{a}_2$【$= \vec{\nabla} g_2(0,0)$】 $= (-1\ 0)$.
【$m = 2$ でなければ他に関係なく 0 点】

ii) $p_1 = \mu_0$, $p_2 = \mu_2$. 【μ_1 が含まれていれば他に関係なく 0 点】

iii) $\mu_1 = 0$.
「下り坂の補題（仮称）」を背理法で用いることで点 (x_0, y_0) で不等式条件下の極小値を取る条件から Gordan の定理の仮定を得るが，$g_1(0,0) = -1 < 0$ だから $g_1 = 0$ は原点をとおらないので，条件 $g_1 \leqq 0$ があっても無くても原点で極小値を取るかどうかは影響を受けないから方程式から消せる.

iv) 勾配ベクトルについての方程式の y 成分から $\mu_1 = 2y_0\mu_2$ なので，$\mu_i \geqq 0$ から $y_0 \geqq 0$ に注意しつつ，x 成分に代入すると $\mu_0 = (1 - 4x_0y_0)\mu_2$ となるから，特に $\mu_2 > 0$，よって $y_0^2 - x_0 = g_2(x_0, y_0) = 0$．よって x_0 と y_0 一方が 0 なら両方 0 になるが，$(x_0, y_0) \neq (0,0)$ の場合を考えているので両方 0 でなく，先ほどの注意と合わせると両方正である．特に $\mu_1 = 2y_0\mu_2 > 0$ なので $0 = g_1(x_0, y_0) = x_0^2 - y_0 - 1$．連立方程式 $g_1(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0) = 0$ から $y_0^4 - y_0 - 1 = 0$ だが増減表を書くと $y_0 > 0$ の解は $y_0 > 1$ を満たすので $x_0 = y_0^2 > 1$ だから最初のほうの $\mu_0 = (1 - 4x_0y_0)\mu_2 < 0$ から $\mu_0 \geqq 0$ に矛盾する．よって $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ を満たす解は無く，Fritz–John 条件の解は $(x_0, y_0) = (0,0)$ だけである.（すなわち原点で f は $g_1 \leqq 0$ と $g_2 \leqq 0$ の下の最小値を取る.）