慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	

				採　点　欄	※
2009 年 7 月 28 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　年　　組			
担当者名	服　部　哲　弥	学籍番号			
科 目 名	微分積分入門	氏　　名			

注意：　答案用紙のおもてがわに収まるように解答すること．

問 1 ．　次の i), ii), iii) の極限値を求めよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくても良い．)

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{2x}$

問 2 ．　$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}-x, & x\neq 0 \text{ のとき}, \\ 0, & x=0 \text{ のとき}, \end{cases}$ によって全ての実数で定義された関数 f について以下に答えよ．

i) $x\neq 0$ のとき導関数 $f'(x)$ を計算せよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくても良い．)

ii) $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を計算せよ．(何を計算しているか採点者にわかる程度の簡単な式変形も書くこと．)

iii) 上の i) と ii) によって全実数で定義された導関数 $f'(x)$ は，連続関数かそれとも連続関数ではないか，答えよ．(要点だけでよいが，短く理由も書くこと．)

問 3 ．　$f(x)=x\,(\log x)^2\ (x>0)$ とする．増減や凹凸に注意して $y=f(x)\ (x>0)$ のグラフを描け．増減表も書くこと．また，グラフには主要な点の数値もわかりやすく記入すること．対数は自然対数を表す．次の結果を用いてよい．

$f'(x)=\log x\,(\log x\ +2),$

$f''(x)=\dfrac{2}{x}\,(\log x\ +1).$

問 1 (30).

i) 【テキスト p.6 問 (1) 類題】

まず通分すると，$\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^n=\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{-n}=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{-n}$ だから，$n=2x$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $x\to\infty$ となることに注意して，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-2}\ \underline{=e^{-2}}.$

詳しく言うと，ここで x^{-2} の連続性と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$（テキスト p.11 定理 15 (1)）を用いた．

ii) 【テキスト p.11 定理 16 (2) 類題】

テキスト p.10 の公式に注意して $t=3^x-1=e^{x\log 3}-1$ とおくと $x=\dfrac{\log(t+1)}{\log 3}$，および，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\log(t+1)}{\log 3}}\ \underline{=\log 3}$．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)}{t}=1$（テキスト p.11 定理 16(1)）を用いた．

iii) 【テキスト p.21 問 2 類題】

指数関数 e^{2x} の連続性と $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$（テキスト p.21 問 2）から，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{2x}=\lim_{x\to+0}e^{2x\log x}=e^0\ \underline{=1}.$

問 2 (30).

i) 【テキスト p.16 定理 3（合成関数の微分）の sin の例で $f(x)=x^{-1}$】

$x\neq 0$ のとき，$f'(x)=(x^2\sin\dfrac{1}{x}-x)'\ \underline{=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}-1.}$

ii) 【テキスト p.13 微分の定義と 05/12 の講義の例】

$f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}-1)\ \underline{=-1}.$

iii) 【テキスト p.7 連続の定義】

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ が存在しない（振動する）ので，$f'(x)$ は $x=0$ で連続ではないから，

<u>連続関数ではない</u>.

問 3 (40).　　【テキスト p.24 問 (5)(7) 類題】

$f(x)=x\,(\log x)^2\ (x>0),\ f'(x)=\log x\,(\log x\ +2),\ f''(x)=\dfrac{2}{x}\,(\log x\ +1).$

x	$+0$	$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\ \nearrow$ $\cap$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$ $\cap$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$ $\cup$	0	$\nearrow$ $\cup$ $+\infty$