慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

平成 22 年 7 月　日 (　)　時限施行		学部　学科　年　組		採点欄 ※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	数学概論 I	氏　名		

注意：　答案用紙の表がわに収まるように簡潔に解答すること．

問１．

次の (1) — (10) に適切な数式･数値を入れ，答案用紙に $\underline{(0)\ 5}$ のように記せ．ただし，(1)(4)(7)(10) はそれぞれ i)—iv) の極限値を答えよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくても良い．)

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}) = \boxed{(1)}$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{(2)}+\frac{4}{n}}{\boxed{(3)}+\frac{5}{n}} = \boxed{(4)}$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\boxed{(5)\qquad})}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\boxed{(6)}}+1} = \boxed{(7)}$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left((\boxed{(8)\qquad})^2\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\boxed{(9)\qquad\qquad}\right)^2 = \boxed{(10)}$

問２．　次の i) ii) iii) の関数の極限値を求めよ．ただし，正（負）の無限大に発散する場合は「$+\infty$」(「$-\infty$」)，それ以外で収束しない場合は「極限無し」と解答せよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくても良い．)

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(1+x)^{1/x^2}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to -0}(1+x)^{1/x^2}$

問３．　次の i) ii) の各々について，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくても良い．)

i) $f(x) = \sin(2x) + \log(3x)$

ii) $f(x) = x^{2x}$

数学概論 I　期末試験　**略解**　　2010/07/28 服部哲弥

問 1 (50=5*10).　【テキスト p.1 例，p.3 問 (2)(5), p.6 問 (3) 各類題, p.6 定理 8 + p.3 定理 3(2)】

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}) = \boxed{(1)\ 3}$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{(2)\ 3}+\frac{4}{n}}{\boxed{(3)\ 2}+\frac{5}{n}} = \boxed{(4)\ \frac{3}{2}}$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\boxed{(5)\ \sqrt{n^2+1}+n})}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\boxed{(6)\ \frac{1}{n^2}}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \boxed{(7)\ \frac{1}{2}}$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left((\boxed{(8)\ 1+\frac{1}{n}})^2\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left(\boxed{(9)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 = \boxed{(10)\ e^2}$

問 2 (30=10*3).　【テキスト p.11 定理 16(2), p.12 問 (4) 各類題】

i) テキスト p.10 のページ最下部，$y = x\log 3$，p.11 定理 16(2) を順に用いると，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log 3}-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\log 3 = 1\times\log 3\ \underline{= \log 3}$

ii) 添え字だと見にくいので $\exp(x)=e^x$ という関数記号を用いて，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x^2} = \lim_{x\to+0}\exp(\frac{1}{x}\frac{\log(1+x)}{x})$． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (p.11 定理 16(1)) だから，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\frac{\log(1+x)}{x} = +\infty$． よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\exp(\frac{1}{x}\frac{\log(1+x)}{x})\ \underline{= +\infty}$

iii) $y=-x$ と変数変換し，添え字だと見にくいので $\exp(x)=e^x$ という関数記号を用いて，

$\displaystyle\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x^2} = \lim_{y\to+0}(1-y)^{1/y^2} = \lim_{y\to+0}\exp(\frac{1}{y}\frac{\log(1-y)}{y})$． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (p.11 定理 16(1)) だから，両辺に -1 をかけて，$x=-y$ と変換して，y は正のほうからだけ 0 に近づけると，$\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{\log(1-y)}{y} = -1$．よって，$\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{1}{y}\frac{\log(1-y)}{y} = -\infty$． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^x = +\infty$ だから $z=-x$ とおいて $\displaystyle\lim_{z\to-\infty}\exp(z) = \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.

$\displaystyle z = \frac{1}{y}\frac{\log(1-y)}{y}$ とすれば，$\displaystyle\lim_{y\to+0}\exp(\frac{1}{y}\frac{\log(1-y)}{y})\ \underline{= 0}$

問 3 (20=10*2).　【テキスト p.14 例 4,6, p.18 問 (8) 各類題】

i) $f'(x) = (\sin(2x))' + (\log(3x))'$

対数関数の性質から $(\log(3x))' = (\log x)' + (\log 3)' = \dfrac{1}{x}$，合成関数の微分法則から $(\sin(2x))' = \cos(2x)\times 2$，だから $f'(x)\ \underline{= 2\cos(2x)+\dfrac{1}{x}}$.

ii) $f'(x) = (x^{2x})' = (e^{2x\log x})' = (2x\log x)'e^{2x\log x}\ \underline{= 2(\log x+1)x^{2x}}$.