慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	**50** 分	分

平成 24 年 07 月 24 日 (火) 3 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 1	氏　名			

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　$\Omega=\{a,b,c\}$ を全体集合（全事象）とし，Ω の部分集合全てを集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F}\to\mathbb{R}$ について $\mathrm{P}[\ \{a\}\ ]=0.6$ とする．また $x=\mathrm{P}[\ \{b\}\ ]$ と置く．以下の問いに答えよ．答案用紙は答えだけでよい．

i) P の定義域に属する集合（事象）の個数と $\mathrm{P}[\ \{b,c\}\ ]$ の値を書け．

ii) P が確率であるために，x が満たすべき条件を書け．

iii) $\mathcal{F}$ のどの事象の確率を調べれば前の小問の条件がわかるか，該当する事象を選び，確率についてのどの性質から条件を得るかとともに書け．

問２．　n 個の公平なサイコロを振る確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ を考える．$k=1,2,\ldots,n$ に対して k 個目のサイコロの目を $Z_k:\ \Omega\to\mathbb{R}$ とおくと，$Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ は独立で，n 個のうち 1 の目の出る個数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ と 2 の目の出る個数 $Y:\ \Omega\to\mathbb{R}$ はそれぞれ $X=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{Z_k=1}$ および $Y=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{Z_k=2}$ と書ける．ここで，たとえば $\mathbf{1}_{Z_k=1}$ は $Z_k(\omega)=1$ を満たす $\omega\in\Omega$ に対して 1，満たさない ω に対して 0 となる関数（確率変数）を表す．以下の 5 個の量 i) ii) iii) iv) v) を計算せよ．答案用紙は計算結果だけでよい．

i) 期待値 $\mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_k=1}\ ]$．

ii) $\mathrm{E}[\ X\ ]$．

iii) 確率変数の積の期待値 $\mathrm{E}[\ X\,Y\ ]$．

iv) 分散 $\mathrm{V}[\ X\ ]=\mathrm{E}[\ (X-\mathrm{E}[\ X\ ])^2\ ]$．

v) 1 の目の出る個数と 2 の目の出る個数の相関係数 $r(X,Y)=\dfrac{\mathrm{E}[\ XY\ ]-\mathrm{E}[\ X\ ]\mathrm{E}[\ Y\ ]}{\sqrt{\mathrm{V}[\ X\ ]\mathrm{V}[\ Y\ ]}}$．

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　2012/07/25 服部哲弥

問１．　【スライド 2 章．問 2–1 類題】

i) $\sharp\mathcal{F} = \underline{8}$.　($\Omega = \{a,b,c\}$ とおいたので両者は同じもの．全体集合 Ω と空集合 $\emptyset$ は，ともに事象，すなわち，確率測度の定義域（集合族）の点（集合）の一つ.)
$\mathrm{P}[\ \{b,c\}\ ] = 1 - \mathrm{P}[\ \{a\}\ ] = \underline{0.4}$.

ii) $\underline{0 \leqq x \leqq 0.4}$

iii) $\underline{\{c\}}$ の確率を調べれば，確率の非負値性から $x \leqq 0.4$ を得る．また，$\underline{\{b\}}$ の確率を x と置いたので，これについて確率の非負値性から $x \geqq 0$ を得る．
（$\{b,c\}$ とくくった解答は不可．理由付けは，ゲームやスポーツ解説と同様に最後の決め手が問われる.)

問２．　【教科書「統計と確率の基礎」3 章練習問題 問 2（スライド問 6–2)】

i) 任意の i と k に対して，$\mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_k=i}\ ] = \mathrm{P}[\ Z_k = i\ ] = \underline{\dfrac{1}{6}}$.

ii) 期待値の加法性から $\mathrm{E}[\ X\ ] = \mathrm{E}[\ Y\ ] = \underline{\dfrac{n}{6}}$.

iii) $\mathrm{E}[\ XY\ ] = \displaystyle\sum_{k,k'} \mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_k=1}\mathbf{1}_{Z_{k'}=2}\ ]$ において，2 重和を $k \neq k'$ と $k = k'$ の場合に分け，$k \neq k'$ のときは Z_k と $Z_{k'}$ したがって $\mathbf{1}_{Z_k=1}$ と $\mathbf{1}_{Z_{k'}=2}$ が独立なことと，$k = k'$ のときは $Z_k(\omega) = 1$ と $Z_k(\omega) = 2$ が同時に起きることがない，したがって，k がなんでも $\mathbf{1}_{Z_k=1}(\omega) \times \mathbf{1}_{Z_k=2}(\omega) = 0$ となることに注意すると，
$\mathrm{E}[\ XY\ ] = \displaystyle\sum_{k\neq k'} \mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_k=1}\ ]\mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_{k'}=2}\ ] = \underline{\dfrac{n(n-1)}{36}}$

iv) $\mathrm{E}[\ X^2\ ] = \displaystyle\sum_{k,k'} \mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{Z_k=1}\mathbf{1}_{Z_{k'}=1}\ ]$ において，上と同様に 2 重和を $k \neq k'$ と $k = k'$ の場合に分け，後者では $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$ を用いると，$\mathrm{E}[\ X^2\ ] = \dfrac{n(n-1)}{36} + \dfrac{n}{6}$．よって，$\mathrm{V}[\ X\ ] = \mathrm{E}[\ X^2\ ] - \mathrm{E}[\ X\ ]^2 = \underline{\dfrac{5n}{36}}$.（$Y$ についても同様.)

v) 共分散 $C(X,Y) = \mathrm{E}[\ XY\ ] - \mathrm{E}[\ X\ ]\mathrm{E}[\ Y\ ] = \dfrac{-n}{36}$．よって $r(X,Y) = \dfrac{C(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}[\ X\ ]\mathrm{V}[\ Y\ ]}} = \underline{-\dfrac{1}{5}}$.

問３．　都合により問題と解答例を省略します.