慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50 分	分
平成 25 年 1 月 29 日 (火) 3 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄		※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	確率論入門 2	氏　名				

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問 1．　以下は，レポート 1 の（レポート問題文を除くなどした）文章である．この文章の設定の下で，その下の**問**i)–iv) に答えよ．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,\ldots\}$ を全体集合とする確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ であって，最初の有限項だけで決まる関数や集合（たとえば 3 項目までの 1 の個数 $N_3\colon\ \Omega \to \mathbb{Z}$ や，それが偶数であるという事象 $A = \{\omega \in \Omega \mid N_3(\omega) \in \{0,2\}\}$）はすべて確率変数および可測集合であって，その分布や確率が，表裏の確率が等しく 0.5 ずつである有限回（十分大きな回数）の硬貨投げの確率空間で計算した結果に一致するもの，が存在することが知られている．

この確率空間の上の確率変数（可測関数）たち，$W_0, W_1, W_2, \ldots$ を $\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $W_n(s_1, s_2, s_3, \ldots) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2s_i - 1)$ で定義する（$W_0(s_1, s_2, s_3, \ldots) = 0$）．

整数 a に対して，初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n(\omega) = a$ となる最小の n を $T_a(\omega)$ とおく．どの n でも $W_n(\omega) = a$ とならない ω に対しては $T_a(\omega) = \infty$ と書くことにすると，関数 $T_a\colon\ \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が定義される．以下は既知とする：

(1) W_n たちは確率変数，すなわち，任意の実数 a に対して，$\{\omega \in \Omega \mid W_n(\omega) \geqq a\} \in \mathcal{F}$（慣例通り以下 ω を略して左辺を $\{W_n \geqq a\}$ 等と書く）,（なお，W_n は整数値なので，確率変数の定義は，任意の整数 i に対して $\{W_n = i\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことと同値,）

(2) 確率変数たちの有限個の和や差や積や最大値や最小値や絶対値は確率変数,

(3) 確率変数列があるとき，各 $\omega \in \Omega$ ごとにその関数列の ω での値が作る数列の極限や級数で定義される関数は（収束すれば）確率変数,

(4) W_k の n 歩目までの最大値を $M_n = \max\{W_1, \ldots, W_n\}$ とおくとき $\{T_a \leqq n\} = \{M_n \geqq a\}$.

b が整数のとき $\mathrm{P}[\,W_n = b\,]$ は単純ランダムウォークが n 歩目で b にいる確率だから，$n < b$ または $n - b$ が奇数のときは $\mathrm{P}[\,W_n = b\,] = 0$ である．反射原理と $\{T_a \leqq n\} = \{M_n \geqq a\}$ によって，自然数 a に対して $\mathrm{P}[\,T_a \leqq n\,] = 2\mathrm{P}[\,W_n \geqq a + 1\,] + \mathrm{P}[\,W_n = a\,]$ が成り立つ．

問．以下，答案用紙は結果だけを書け．

i) 文章中の N_3 について $(s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $N_3(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ を s_i たちを用いて具体的に表せ．

ii) 文章中の A について $\mathrm{P}[\,A\,]$ を計算せよ．

iii) 文章後半の W_n について $\mathrm{P}[\,W_5 = 1\,]$ を計算せよ．

iv) 文章の最後の公式と中心極限定理を用いると，整数 a と自然数 t に対して

$$\lim_{m \to +\infty} \mathrm{P}[\,T_{m\,a} \leqq m^2\,t\,] = 2 \int_a^{\infty} \rho(x)\,dx$$

の形の公式を得る．$\rho(x)$ を求めよ．$n = m^2 t$ と $x = z\sqrt{t}$ の置き換えが参考になるかもしれない．

問 2． 下記『』内は，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が確率空間であることの定義（コルモゴロフの公理）である．空欄に適切な式または語句を入れよ．答案用紙は，(0) $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$, あるいは，(0) X は確率変数である， のように解答せよ．なお，空欄の大きさは意味が無い．

『$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる空でない集合族で，2 性質

- $\boxed{(1)\qquad\qquad\qquad\qquad}$, および
- $\boxed{(2)\qquad\qquad\qquad\qquad}$, を満たす．

P は Ω 上の集合関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ で，以下の 3 性質を満たす：

- $\boxed{(3)\qquad}$,
- $\boxed{(4)\qquad}$,
- $\boxed{(5)\qquad}$.

』

問 3． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数たちで正規分布に従うものを考える．以下に答えよ．

i) 実数値確率変数 $U:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が $\rho(u) = \dfrac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-u^2/10}$ を密度関数とする連続分布に従うとき，U の期待値 $\underline{\mathrm{E}[\,U\,]}$，分散 $\underline{\mathrm{V}[\,U\,]}$，尖度 $\underline{\dfrac{\mathrm{E}[\,(U-\mathrm{E}[\,U\,])^4\,]}{(\mathrm{V}[\,U\,])^2}}$ を計算せよ．答案用紙は結果だけを書け．

ii) 2 つの実数値確率変数 X と Y の結合分布（(X,Y) の分布，同時分布）が

$$\rho(x,y) = \frac{5\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}} e^{-(25x^2-20xy+10y^2)/3}$$

を密度関数とする 2 次元正規分布に従うとき，X と Y の共分散 $\underline{\mathrm{Cov}(X,Y)} = \mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,])(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])\,]$ と相関係数 $\underline{r} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}$ を計算せよ．答案用紙は結果だけを書け．

iii) 上の問の X と Y に対して，$Z = -2X + Y$ および $W = X + 2Y$ とおくと Z と W は独立な確率変数である．このことの証明（の要約）になるように次の書式の下線部を 2 箇所とも式または説明文で適切に補って，完成した文を解答用紙に書け．

書式： (Z,W) の分布（結合分布）は，密度関数が $\tilde{\rho}(z,w) =$ ____________________ で与えられる連続分布となり，$\tilde{\rho}(z,w)$ は ____________________ と ____________________ の積なので，Z と W は独立である．

確率論入門 2　期末試験　**略解**　2013/01/30 服部哲弥

問 1 (40=10*4).　【レポート１＋中心極限定理】

i) $\underline{N_3(s_1, s_2, s_3, \ldots) = s_1 + s_2 + s_3}$.

ii) $\underline{\mathrm{P}[\,A\,] = \frac{1}{2}}$.

iii) $\underline{\mathrm{P}[\,W_5 = 1\,] =}\ 2^{-5}{}_5\mathrm{C}_3 = \underline{\frac{5}{16}}$.

iv) $\underline{\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \mathrm{P}[\,T_{m\,a} \leqq m^2\,t\,] =} \lim_{m\to+\infty} (2\mathrm{P}[\,W_{m^2t} \geqq ma+1\,] + \mathrm{P}[\,W_{m^2t} = ma\,])$

$$= 2\lim_{m\to+\infty} \mathrm{P}[\,\frac{1}{\sqrt{m^2t}} W_{m^2t} \geqq \frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{m^2t}}\,] = 2\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}[\,\frac{1}{\sqrt{n}} W_n \geqq \frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,]$$

$= 2\displaystyle\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 2\int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx$ だから，$\underline{\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}}$.

問 2 (25=5*5).　【コルモゴロフの公理】

解答例．$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる空でない集合族で，$\boxed{\text{(1) 補集合という集合算について閉じていること}}$，および $\boxed{\text{(2) 可算和という集合算について閉じていること}}$，を満たす．P は Ω 上の集合関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ で，$\boxed{\text{(3) 非負値性}}$，$\boxed{\text{(4) } \sigma \text{ 加法性}}$，$\boxed{\text{(5) 全測度 1}}$，を満たす．

別解例．$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる空でない集合族で，$\boxed{(1)\ A \in \mathcal{F} \text{ ならば } A^c \in \mathcal{F}}$，および $\boxed{(2)\ A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}}$，を満たす．P は Ω 上の集合関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ で，$\boxed{(3)\ \mathrm{P}[\,A\,] \geqq 0,\ A \in \mathcal{F}}$，

$\boxed{(4)\ A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ が } n \neq m \text{ のとき } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ ならば } \mathrm{P}[\,\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_n\,]}$，

$\boxed{(5)\ \mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1}$，を満たす．

問 3 (35=5*7).　【レポート２】

i) U が $\rho(u) = \dfrac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-u^2/10}$ を密度関数とする連続分布に従うとき，

U の期待値 $\underline{\mathrm{E}[\,U\,] = 0}$，分散 $\underline{\mathrm{V}[\,U\,] = 5}$，尖度 $\underline{\dfrac{\mathrm{E}[\,(U - \mathrm{E}[\,U\,])^4\,]}{(\mathrm{V}[\,U\,])^2} = 3}$.

ii) (X, Y) が $\rho(x, y) = \dfrac{5\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}} e^{-(25x^2 - 20xy + 10y^2)/3} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}} e^{-5x^2 - 10(x-y)^2/3}$ を密度関数とする 2 次元正規分布に従うとき，$\mathrm{E}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,Y\,] = 0$ なので，

$\underline{\mathrm{Cov}(X, Y)} = \mathrm{E}[\,XY\,] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} xy\rho(x, y) dxdy = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-5x^2} dx\ \underline{= \frac{1}{10}}$.

$\underline{r} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}} = \dfrac{1/10}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10})}}\ \underline{= \sqrt{\frac{2}{5}}}$.

iii) (Z, W) の分布（結合分布）は，密度関数が $\tilde{\rho}(z, w) = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{3}} e^{-2z^2 - w^2/3}$ で与えられる連続分布となり，$\tilde{\rho}(z, w)$ は z だけに依存する密度関数 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} e^{-2z^2}$ と w だけに依存する密度関数 $\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-w^2/3}$ の積なので，Z と W は独立である．