慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	50 分	分

平成 25 年 07 月 24 日 (水) 6 時限施行		学部　　学科　　年　　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 1	氏　名			

注意：答案用紙は裏を使わないこと．解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問 1 ．　$\Omega=\{a,b,c,d\}$ を全体集合（全事象）とし，Ω の部分集合全てを集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F}\to\mathbb{R}$ について $\mathrm{P}[\,\{a\}\,]=0.25$ とし，$x=\mathrm{P}[\,\{b\}\,]$ および $y=\mathrm{P}[\,\{c\}\,]$ と置く．以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) P の定義域 $\mathcal{F}$ に属する集合（事象）の個数を書け．

(2) P が確率であるために x と y が満たすべき条件を書け．

(3) 下記の (i)(ii)(iii) はこの**問 1** の冒頭で与えた確率空間 (Ω,P) で（x や y を上手に選ぶことで）記述（モデル化）できるか？それぞれについて (a) **問 1** の (Ω,P) で記述できる，(b) 確率空間で記述できるが**問 1** の (Ω,P) ではできない，(c) 確率空間では記述できない，のいずれであるかを答えよ．答案用紙には，
(v)—(d)，(vi)—(e)，(vii)—(f)
のように書け．ただし，(a)(b)(c) 全てが解答に現れるとは限らない，

記

(i) 4 個の品物を売る店での買い物の金額（全部買い占めたときの金額を 1 とおく）
(ii) 公平な 2 枚の硬貨を投げたときの結果の分布
(iii) 4 個の品物を売る店でそれぞれの商品ごとに公平な硬貨を投げて，表が出たら買い，裏が出たら買わないとき，4 回の硬貨投げで決まる買い物の分布

問 2 ．　みどりの窓口など，窓口が M 個（$M>1$ とする）あるサービス提供の場所で，一列並びと並列並びの待ち時間の分布を考える．待ち行列に着いたとき自分の前に N 人待っていて，$i=1,2,\ldots,N$ について識別番号 i の客の窓口処理に要する時間を S_i とする．

教科書にしたがって，S_i たちは独立で分布が等しい確率変数とする．その分布と同じ分布を持つ確率変数を代表的に S と書くとき，期待値と標準偏差をそれぞれ $\tau=\mathrm{E}[\,S\,]$ と $\sigma=\sqrt{\mathrm{V}[\,S\,]}$ とおく．窓口の処理能力は等しく時間変化もないが，客の実際の処理時間は運不運があり，$\sigma>0$ である（S_i たちは確定値ではなく分布する）とする．

一列並びの場合の待ち時間 $T^{(1)}$ は，N 人のサービスを M 個の窓口で処理し終える時間だから，$T^{(1)}=\dfrac{1}{M}(S_1+S_2+\cdots+S_N)$ である．

簡単のため，N は M の倍数とすると，並列並びの場合は自分が選んだ窓口の前に N/M 人いるので，その人たちの識別番号を最初の N/M までとすると，並列並びの処理時間 $T^{(2)}$ は，$T^{(2)}=S_1+S_2+\cdots+S_{N/M}$ である．

以上を前提として，以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) 一列並びの待ち時間の期待値と標準偏差 $\mathrm{E}[\,T^{(1)}\,]$ と $\sqrt{\mathrm{V}[\,T^{(1)}\,]}$ を計算して $N,\ M,\ \tau,\ \sigma$ で表せ．

(2) 並列並びの待ち時間の期待値と標準偏差 $\mathrm{E}[\,T^{(2)}\,]$ と $\sqrt{\mathrm{V}[\,T^{(2)}\,]}$ を計算して $N,\ M,\ \tau,\ \sigma$ で表せ.

(3) 繁華街の携帯電話の店や銀行で見られる整理券を機械で受け取ってその番号が呼ばれるのを待つ方法は一列並びと並列並びのどちらに近いか.

(4) 自分が，電車が発車する時刻や（仕事の昼休み中に列に並ぶなどで）次の用事のために時間 t_0 だけ並んでも順番が来なければ処理を諦めないといけない状況とする．余裕をもって並んでいる（$t_0 > \dfrac{N}{M}\tau$ が成り立つ）とき，一列並びと並列並びのどちらが有利か．一列並びが有利，並列並びが有利，同等，の中から選んで答えよ.

(5) 上の小問と同様の状況として，同じ記号を使う．上の小問と逆に，列に並ぶのが遅れて時間の余裕 t_0 が小さい（$t_0 < \dfrac{N}{M}\tau$ が成り立つ）とき，一列並びと並列並びのどちらが有利か. 一列並びが有利，並列並びが有利，同等，の中から選んで答えよ.

問３． ある正の定数 λ があって，非負整数 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $X = k$ となる確率が $\mathrm{P}[\,X = k\,] = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$ であるとき，非負整数に値を取る確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{Z}_+$ はポワッソン分布に従うという．以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) X の期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ を定義に従って級数の形で書け.（答案用紙は答えだけでよい.）

(2) X の期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ を計算して λ だけで表せ.（答案用紙は答えだけでよい.）

(3) 分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を上の小問と同様に λ で表せ.（答案用紙は答えだけでよい.）

(4) 確率変数 Y の値の分布が平均 $\lambda = 3$ のポワッソン分布，確率変数 Z の値の分布が平均 $\lambda = 1$ のポワッソン分布，かつ，Y と Z は独立とする．非負整数 k に対して定義と 2 項定理を用いて計算すると，

$$\sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{P}[\,Y = \ell\,]\mathrm{P}[\,Z = k-\ell\,] = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{3^\ell\, 1^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!}\, e^{-3}e^{-1} = \frac{e^{-4}}{k!}\sum_{\ell=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_\ell\, 3^\ell\, 1^{k-\ell} = \frac{e^{-4}}{k!}(3+1)^k$$

となる．Y と Z の和 $Y + Z$ の値の分布を求めよ.（答案用紙は答えだけでよい.）

(5) 1ヶ月あたりの世界の航空事故は平均 4 のポワッソン分布にほぼ従うという．最後の事故がいまから 1 週間前にあったとき，いまから半月以内に事故のある確率を求めよ.（答案用紙は答えだけでよい.）

確率論入門1　期末試験　**略解**　2013/07/25 服部哲弥

問1 (35=10+10+5*3).　【スライド第2回】

(1) $\underline{\sharp\mathcal{F} = 16}$.　（全体集合$\Omega$と空集合$\emptyset$は，ともに事象，すなわち，確率測度の定義域（集合族）の点（集合）の一つ.）

(2) $\underline{x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 0.75}$.

(3) (i)—(a), (ii)—(a), (iii)—(b).　(i) の買い物の金額を確率空間で表せるのは，構成比や割合が確率なのと同様. (ii) はたとえば a, b, c, d を順に「表表」「表裏」「裏表」「裏裏」と読めばよい. (iii) は4回の硬貨投げを確率で表すには少なくとも $16 = 2^4$ 個の要素を持つ確率空間が必要.

問2 (35=10+10+5+5+5).　【教科書「統計と確率の基礎」2章§3 説明（スライド第6回)】

(1) $\underline{\mathrm{E}[\,T^{(1)}\,] = \dfrac{N}{M}\tau}$, $\underline{\sqrt{\mathrm{V}[\,T^{(1)}\,]} = \dfrac{\sqrt{N}}{M}\sigma}$.

(2) $\underline{\mathrm{E}[\,T^{(2)}\,] = \dfrac{N}{M}\tau}$, $\underline{\sqrt{\mathrm{V}[\,T^{(2)}\,]} = \dfrac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}\sigma}$.

(3) 一列並び.

(4) 一列並びが有利.　（まじめで仕事の忙しい客をだいじにするためにサービス会社は一列並びを選んだ，と考えることもできる.）

(5) 並列並びが有利.　（教科書で強調した状況，すなわち上の小問の用意周到な人にとって並列並びが相対的に不利になるのは，普通なら間に合わない時間に駆け込んだ人が運良く早い列で間に合った分の割を食った，と理解できる.）

問3 (30=6*5).　【教科書「統計と確率の基礎」6章練習問題 問3，問6（スライド第9回)】

(1) $\mathrm{E}[\,X\,] = \underline{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, e^{-\lambda}}$.

(2) $\mathrm{E}[\,X\,] = \lambda \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}\, e^{-\lambda} = \underline{\lambda}$.

(3) $\mathrm{V}[\,X\,] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda)^2 \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1)+(1-2\lambda)k+\lambda^2) \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} = \lambda^2+(1-2\lambda)\,\lambda+\lambda^2 = \underline{\lambda}$.

(4) $\underline{\lambda = 4}$ のポワッソン分布　$\underline{(\mathrm{P}[\,Y+Z=k\,] = e^{-4}\dfrac{4^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots)}$.

(5) 事故の発生時系列がポワッソン過程で記述できると，時間間隔は平均1/4ヶ月の指数分布になる. 指数分布の無記憶性により，半月以内に起こる確率も平均1/4ヶ月の指数分布になるから $\displaystyle\int_0^{0.5} 4e^{-4x}dx = \underline{1 - e^{-2} = 0.86\cdots}$.