慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 26 年 1 月 23 日 (木) 6 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄 ※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	確率論入門 2	氏　名		

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　以下は，レポート１の文章を若干書き換えた文章である．この文章の設定の下で，その下の i)–iii) に答えよ．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,\ldots\}$ を考える．0 を「裏」，1 を「表」と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．たとえば最初と 3 回目に表が出る事象（2 回目は表裏どちらも含める）は $A = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega \mid \boxed{\text{(a)}\qquad}\}$ と書ける．この集合 A のように，無限列の有限項だけで決まる Ω の部分集合に対して，表と裏がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で与えられる硬貨投げの対応する有限繰り返しの確率に，$\mathrm{P}[\,A\,]$ が等しくなるような，Ω 上の確率測度 P が存在することが知られている．たとえば上の集合 A に対しては，計算すると $\mathrm{P}[\,A\,] = \boxed{\text{(b)}\quad}$ となる．

もう少し詳しく書くと，Ω 上の確率 P とは Ω の部分集合を集めた集合（事象）の集合（集合族）$\mathcal{F}$ を定義域とする実数値関数 $\mathrm{P}\colon\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ であって，コルモゴロフの公理を満たすものを言うのであった．

いっぽう，無限列の有限項だけで決まる Ω の部分集合に対して P の値が与えられているということは，$B \subset \Omega$ が有限項だけで決まるならば $B \in \mathcal{F}$ であることを意味する．

この確率空間の上の確率変数（可測関数）たち，$W_0, W_1, W_2, \ldots$ を $\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $W_0(\omega) = 0$，および，$n \geqq 1$ のとき $W_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (2s_i - 1)$ で定義して，（原点を出発点とする）単純ランダムウォークと呼ぶ．単純ランダムウォークは原点から出発して硬貨を投げる毎に表が出れば右へ，裏が出れば左へ 1 ずつ動くすごろくと考えることができる．

たとえば,『このすごろくが負のマス目（出発点より左のマス目）に達する前にマス目 2（原点から右に 2 マス目）に達する事象』を C とおくとき，C はすごろく板の中の，座標で $\boxed{\text{(c)}\ \square, \square, \square, \square}$ の，4 個のマス目があれば表せる事象なのに，有限回の硬貨投げの繰り返しの確率空間で表せないことを見れば，無限列の集合 Ω の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を考える動機となる．

C を次のように有限項で決まる可算個の事象たちの和集合として表すことでその確率を計算できる．

$C_0 = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_1 = s_2 = 1\}$ および，$n = 1,2,3,\ldots$ に対して

$C_n = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_{2i-1} = 1,\ s_{2i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ \ s_{2n+1} = s_{2n+2} = 1\}$ とおくと，これら可算無限個の集合を用いて $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ が成り立つ．他方 C_n たちは互いに共通部分を持たないので，P の σ 加法性から $\mathrm{P}[\,C\,] = \boxed{\text{(d)}\qquad}$ と，C_n たちの確率を各項とする級数で表せる．

問．以下，答案用紙は結果だけを書け．

i) 文章中の 4 箇所の空欄 (a)(b)(c)(d) を適切な数式で埋めよ．((c) はコンマをあらかじめ欄の中に書き込んであるが，答案用紙にはそれも含めて欄のまとまり全部を書け.)

ii) $\mathrm{P}[\,W_5 = 3\,]$ を計算して具体的な有理数（分数）で表せ．

iii) $\mathrm{P}[\,C\,]$ の値を計算せよ．

問２．　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実数値確率変数たちについて正規分布に関係する以下の小問

i), ii)(a), ii)(b) に答えよ．

i) 実数値確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が $\rho(x) = \sqrt{\dfrac{2}{e\pi}}e^{-2x^2+2x}$ を密度関数とする連続分布に従うとき，X の分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を計算せよ．答案用紙は結果だけを書け．

ii) 標準正規分布に従う 4 個の独立な確率変数 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 の 2 乗の和を $Y = Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2$ とおくとき，Y の従う分布の密度関数を f とおく．f は $y < 0$ のとき $f(y) = 0$，$y \geqq 0$ のとき $f(y) = b\,y\,e^{-cy}$ という関数形である．ここで，b と c は正定数である．このことから，$a > 0$ のとき $\mathrm{E}[\,e^{-aY}\,] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-a\,y}\,f(y)\,dy$ が計算できて b と c を用いて表せる．いっぽう，この式の左辺は Y の定義と指数法則と，Z_i たちが独立でそれぞれ Z 標準正規分布に従うことから，

(*) $\quad \mathrm{E}[\,e^{-aY}\,] = \displaystyle\prod_{i=1}^4 \mathrm{E}[\,e^{-a\,Z_i^2}\,] = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-(a+\frac{1}{2})\,z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\right)^4$

とも書ける．

(a) (*) の最右辺を計算して a だけで表せ．（参考（ガウス積分）：$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$ ）

(b) $\mathrm{E}[\,e^{-aY}\,]$ の，問題文中の計算手続きと問 (a) の，2 つの変形が a について恒等式になるように b と c を決めることで，Y の分布の密度関数 f を求めよ.（参考：計算結果の逆数が a の多項式）

(a)(b) とも，答案用紙は結果だけを書け．

問 3 ．　　独立確率変数の和に関連する以下の小問 i)–iii) に答えよ．

i) X と Y が独立で，X の分布は平均 5 のポワッソン分布，Y の分布は平均 3 のポワッソン分布のとき，$\mathrm{P}[\,X+Y=2\,]$ を計算せよ．答案用紙は結果だけを書け．なお，自然対数の底 e や分数はそのままとし，小数に直さないこと．

ii) X, Y, Z が独立で，それぞれ標準正規分布に従うとき，3 つの和と 2 つの和の共分散 $\mathrm{Cov}(X+Y+Z, Y+Z)$ を求めよ．ここで確率変数 U と V に対して $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{E}[\,(U-\mathrm{E}[\,U\,])(V-\mathrm{E}[\,V\,])\,]$ であり，特に自分自身との共分散は分散に等しい：$\mathrm{Cov}(U,U) = \mathrm{E}[\,(U-\mathrm{E}[\,U\,])^2\,] = \mathrm{V}[\,U\,]$．答案用紙は結果だけを書け．

iii) **問 1** の単純ランダムウォーク $W_0, W_1, W_2, \ldots$ について，n と m が $n > m$ を満たす自然数のとき，$\mathrm{Cov}(W_m, W_n)$ を求めよ（m または n 以外の記号を含まない形で，答案用紙は結果だけを書け）.（参考：$X_i(w) = 2s_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots,$ とおくと $X_1, X_2, \ldots$ は独立でそれぞれ期待値が 0 であることなどを用いてもよい.）

確率論入門 2　期末試験　**略解**　　2014/01/23 服部哲弥

問 1 (40=5*4+10*2).　（解答は人によって異なる.）【ランダムウォーク（レポート 1，教科書第 1, 13 章)】

i) (a) $s_1 = s_3 = 1$　(b) $\frac{1}{4}$　(c) $-1, 0, 1, 2$　(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,C_n\,]$

ii) $\mathrm{P}[\,W_5 = 3\,] = 2^{-5}\,{}_5\mathrm{C}_1 = \underline{\frac{5}{32}}$.　iii) $\mathrm{P}[\,C\,] = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n-2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \underline{= \frac{1}{3}}$.

問 2 (30=10+10*2).　【正規分布と独立正規分布の周辺分布（レポート 2，教科書 7 章)】

i) $\rho(x) = \sqrt{\frac{2}{e\pi}} e^{-2x^2+2x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(x-\frac{1}{2})^2}$ は平均 $\frac{1}{2}$ 分散 $\frac{1}{4}$ の正規分布の密度関数なので，
分散 $\underline{\mathrm{V}[\,X\,] = \frac{1}{4}}$.

ii) (a) $\underline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+\frac{1}{2})\,z^2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\right)^4} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\pi(a+\frac{1}{2})}}\right)^4 \underline{= \frac{1}{(2a+1)^2}}$.

(b) $\int_0^{\infty} e^{-a\,y} f(y)\,dy = \frac{b}{(a+c)^2}$ なので，(逆数をとって等しいと置けば) $\frac{1}{b}(a+c)^2 = (2a+1)^2$. これが a について恒等式になるのは $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$ のときだから，$\underline{f(y) = \frac{1}{4}\,y\,e^{-y/2}}$.

問 3 (30=10*3).　【独立確率変数の和（レポート 3，教科書第 5 章)】

i) $X+Y$ は平均 8 のポワッソン分布に従うので $\underline{\mathrm{P}[\,X+Y=2\,] = \frac{32}{e^8}}$.

ii) X, Y, Z は独立で期待値が 0 だから，$\mathrm{Cov}(X+Y+Z, Y+Z) = \mathrm{E}[\,(X+Y+Z)(Y+Z)\,] = \mathrm{E}[\,X\,(Y+Z)\,] + \mathrm{E}[\,Y^2+2YZ+Z^2\,] = \mathrm{E}[\,X\,]\,\mathrm{E}[\,Y+Z\,] + 2\mathrm{E}[\,Y\,]\,\mathrm{E}[\,Z\,] + \mathrm{E}[\,Y^2\,] + \mathrm{E}[\,Z^2\,] = \mathrm{E}[\,Y^2\,] + \mathrm{E}[\,Z^2\,]$.
$\mathrm{E}[\,Y^2\,] = \mathrm{V}[\,Y\,] = 1 = \mathrm{V}[\,Z\,] = \mathrm{E}[\,Z^2\,]$ だから，$\underline{\mathrm{Cov}(X+Y+Z, Y+Z) = 2}$.

iii) $i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $X_i(\omega) = 2s_i - 1$ とおくと，$W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ であって，$\mathrm{E}[\,X_i\,] = 0$, $\mathrm{V}[\,X_i\,] = \mathrm{E}[\,X_i^2\,] = 1$ および $i \neq j$ のとき $\mathrm{E}[\,X_i\,X_j\,] = 0$ であることは直接計算で得られる．したがって，$\mathrm{E}[\,W_m\,] = 0$ および

$$\mathrm{V}[\,W_m\,] = \mathrm{E}[\,W_m^2\,] = \mathrm{E}[\,\sum_{i=1}^{m} X_i \times \sum_{j=1}^{m} X_j\,] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}[\,X_i \times X_j\,]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}[\,X_i^2\,] + \sum_{1 \leqq i,j \leqq m;\ i \neq j} \mathrm{E}[\,X_i X_j\,] = m.$$

さらに，$n > m$ のとき，$W_n - W_m = \sum_{i=m+1}^{n} X_i$ の中の X_i たちは $W_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$ の中の X_i たちと共通のものがないので，$\mathrm{E}[\,(W_n - W_m)\,W_m\,] = 0$. 以上を用いると，$n > m$ のとき，$\underline{\mathrm{Cov}(W_m, W_n)} = \mathrm{E}[\,W_m\,W_n\,] = \mathrm{E}[\,W_m\,(W_n - W_m)\,] + \mathrm{E}[\,W_m^2\,] = \mathrm{V}[\,W_m\,] \underline{= m}$.
（別解：$\mathrm{E}[\,(W_n - W_m)\,W_m\,] = 0$ は上記のとおり．講義で説明した X_i たちの独立性と独立確率変数の分散の加法性を用いれば，$\mathrm{V}[\,W_m\,] = m$ は明らか.）