慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

平成 26 年 07 月 23 日 (水) 6 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	確率論入門 1	氏　名	

採　点　欄	※

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　$\Omega=\{a,b,c\}$ を全体集合（全事象）とし，Ω の部分集合全てを要素に持つ集合（Ω の部分集合全てを集めた集合族）$\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F}\to\mathbb{R}$ について以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) P が確率測度である（コルモゴロフの公理を満たす）というだけでは実際の値の取り方は種々あり得るが，次の変形は，$\mathrm{P}[\,\{a\}\,]=\mathrm{P}[\,\{b\}\,]=0.3$ であるような確率測度 P は $\mathrm{P}[\,\{c\}\,]$ の値が決まること（と，その値の計算）を示す．変形の各行の右の空欄に，ぞれぞれ変形に用いたコルモゴロフの公理系の中の規則（ただし，春学期前半の有限集合の場合の簡単版）を下記の選択肢から選んで空欄 (a)–(c) を埋め，また，$\mathrm{P}[\,\{c\}\,]$ の値も計算して空欄 (d) を埋めよ．答案用紙には，それぞれ (z) 市場の失敗 のように書け．

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{P}[\,\Omega\,]=\mathrm{P}[\,\{a,b,c\}\,] && \boxed{\text{(a)}\qquad}\\
&= \mathrm{P}[\,\{a\}\cup\{b,c\}\,]=\mathrm{P}[\,\{a\}\,]+\mathrm{P}[\,\{b,c\}\,] && \boxed{\text{(b)}\qquad}\\
&= 0.3+\mathrm{P}[\,\{b\}\cup\{c\}\,]=0.3+\mathrm{P}[\,\{b\}\,]+\mathrm{P}[\,\{c\}\,] && \boxed{\text{(c)}\qquad}\\
&= 0.3+0.3+\mathrm{P}[\,\{c\}\,].\qquad \text{よって，}\mathrm{P}[\,\{c\}\,]= && \boxed{\text{(d)}\quad}
\end{aligned}
$$

選択肢：　実数値，　集合関数，　非負値性，　加法性，　劣加法性，　全測度 1，
　　ドモルガンの法則，　フビニの定理，　負の外部性，　市場の失敗

(2) 確率測度 P は（コルモゴロフの公理によって実数に値をとる集合関数なので），Ω の部分集合 A を選ぶごとに実数値 $\mathrm{P}[\,A\,]$ が決まる．その値の組み合わせは P ごとに変わりうる．たとえば (1) の例では値の集合は $\{\mathrm{P}[\,A\,]\mid A\subset\Omega\}=\{0,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.7,\ 1\}$ となる．

(a) もっとも多種類の値をとる P の場合について，値の個数を答えよ．(すなわち，実数値の集合 $\{\mathrm{P}[\,A\,]\mid A\subset\Omega\}$ を $\Omega=\{a,b,c\}$ 上のすべての確率測度 P について考えたとき，この集合の要素の個数の最大値を答えよ．たとえば (1) の例では値の個数は 6 個である．)

(b) 逆に，もっとも少ない種類の値をとる P の場合の値の個数を答えよ．(すなわち，集合 $\{\mathrm{P}[\,A\,]\mid A\subset\Omega\}$ の要素の個数の，P を変えたときの最小値を答えよ．)

問２．　（春学期前半のように）Ω を有限集合とし，P をその上の確率測度とする．以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) Ω 上の確率変数は（有限集合 Ω 上の関数なので）有限種類の値しか取らない．独立な確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ と $Y:\ \Omega\to\mathbb{R}$ が与えられ，X は m 種類，Y は n 種類の値をとるとする．以下は確率変数が独立であることの定義から積の期待値が期待値の積に等しいことを導く 1 つの証明である．空欄 (a)(b) を適切な式で埋めよ．
X と Y が独立ということの定義は $\mathrm{P}[\,X\geqq a,\ Y\geqq b\,]=\mathrm{P}[\,X\geqq a\,]\,\mathrm{P}[\,Y\geqq b\,]$ がすべての実数の組 (a,b) に対して成り立つことだが，有限種類の値しか取らない場合は，これは,(定義式

の中の不等号をすべて等号に置き換えた） $\boxed{\text{(a)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
がすべての実数の組 (a, b) に対して成り立つことと同値である．X と Y が取る値をそれぞれ小さい順に $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ および $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ とすると，$i = 1, 2, \ldots, m$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ について，$\boxed{\text{(a)}}$ で $a = a_i$, $b = b_j$ と置いて，mn 個の等式を得る．
実数上の実数値関数 f, g と X, Y の合成関数をそれぞれ $f \circ X$ および $g \circ Y$ と書く．たとえば p と q を定数として $f(x) = x - p$, $g(x) = x - q$ ならば，$f \circ X$ は確率変数 $X - p$ であり，同様に $g \circ Y = Y - q$ である．この記号を用いて積 $(f \circ X)(g \circ Y)$ の期待値を計算すると，上で注意した mn 個の等式から，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,(f \circ X)(g \circ Y)\,] &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(a_i)\, g(b_j)\, \mathrm{P}[\,X = a_i,\ Y = b_j\,] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(a_i)\, g(b_j)\, \mathrm{P}[\,X = a_i\,]\, \mathrm{P}[\,Y = b_j\,] \\
&= \Bigl(\sum_{i=1}^{m} f(a_i) \mathrm{P}[\,X = a_i\,]\Bigr) \times \Bigl(\sum_{j=1}^{n} g(b_j) \mathrm{P}[\,Y = b_j\,]\Bigr) \\
&= \boxed{\text{(b)} \qquad\qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

となり，積の期待値が期待値の積に等しい．最初と最後の変形で期待値の定義，2 番目の変形で $\boxed{\text{(a)}}$，をそれぞれ用い，3 番目の変形では分配法則を用いた．

(2) 以下は (1) の結果を用いた独立確率変数の分散の加法性の証明である．空欄 (c)(d) を適切な式で埋めよ．
p と q を定数とし，$f(x) = x - p$, $g(x) = x - q$ とおいて (1) の結果 $\boxed{\text{(b)}}$ を書き直すと

$$
\mathrm{E}[\,(X - p)\,(Y - q)\,] = \boxed{\text{(c)} \qquad\qquad\qquad\qquad}
$$

を得る．期待値は定数なのでこの式に $p = \mathrm{E}[\,X\,]$ と $q = \mathrm{E}[\,Y\,]$ を代入できる．また，期待値の線形性から $\mathrm{E}[\,X - p\,] = \mathrm{E}[\,X\,] - p$ などを得ることに注意すると．$\mathrm{E}[\,X - \mathrm{E}[\,X\,]\,] = 0$ を得る．よって，分散の定義と期待値の線形性も用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}[\,X + Y\,] &= \mathrm{E}[\,(X + Y - \mathrm{E}[\,X + Y\,])^2\,] = \mathrm{E}[\,((X - \mathrm{E}[\,X\,]) + (Y - \mathrm{E}[\,Y\,]))^2\,] \\
&= \mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])^2\,] + 2\mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])\,] + \mathrm{E}[\,(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])^2\,] \\
&= \mathrm{V}[\,X\,] + 2\mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])\,] + \mathrm{V}[\,Y\,] \\
&= \boxed{\text{(d)} \qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

となって，独立確率変数 X と Y について分散の加法性を得る．

問 3． 確率変数の分布について以下の問いに答えよ．**答案用紙は答えだけでよい．**

(1) p を $0 < p < 1$ なる定数とし，表が出る確率が p の硬貨を，表が出るまで繰り返し投げるとき，裏が出る回数を X とおく．非負整数 ℓ に対して，$X = \ell$ となる確率は幾何分布 $\mathrm{P}[\,X = \ell\,] = p\,(1 - p)^{\ell}$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots,$ で与えられる．このとき，いつまでたっても表が出ない確率 p' と X の分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を答えよ．

(2) λ を正定数とする．ある種の事故がある決まった期間に起こる回数 Y の分布は平均 λ のポワッソン分布に従うと言う．事故が起こらない確率 $\mathrm{P}[\,Y = 0\,]$ と事故件数の期待値 $\mathrm{E}[\,Y\,]$ を答えよ．

(3) (2) の事故の記録を担当する怠惰な記録係が，表裏の確率が等しい硬貨を投げて，表が出れば事故の件数 Y の 2 倍の件数 $2Y$ を記録し，裏が出れば 0 件と記録する．この記録を表す確率変数を Z とおくとき，0 が記録される確率 $\mathrm{P}[\,Z = 0\,]$ と Z の期待値 $\mathrm{E}[\,Z\,]$ を答えよ．

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　　　2014/07/24 服部哲弥

問 1 (30=6*5（「速度」は不正解））.　【スライド第 2 回，レポート 1】

(1) (a) 全測度 1　(b) 加法性　(c) 加法性　(d) 0.4

(2) (a) 8　（Ω の部分集合は $2^3 = 8$ 個だからこれが最大個数．$\mathrm{P}[\,\{a\}\,] = 0.1$, $\mathrm{P}[\,\{b\}\,] = 0.2$ のときすべて異なる値になる.）

(b) 2　（たとえば $\mathrm{P}[\,\{a\}\,] = \mathrm{P}[\,\{b\}\,] = 0$ を満たす確率測度では，$c \in A$ ならば $\mathrm{P}[\,A\,] = 1$，$c \notin A$ ならば $\mathrm{P}[\,A\,] = 0$ となるので，0 と 1 の 2 種類の値しか取らない.）

問 2 (40=10*4（部分点無し））.　【教科書「統計と確率の基礎」3 章 (3.3)(3.4)(3.6)，レポート 2】

(1) (a) $\mathrm{P}[\,X = a,\ Y = b\,] = \mathrm{P}[\,X = a\,]\,\mathrm{P}[\,Y = b\,]$

(b) $\mathrm{E}[\,f \circ X\,] \times \mathrm{E}[\,g \circ Y\,]$　（$\mathrm{E}[\,f(X)\,]\,\mathrm{E}[\,g(Y)\,]$ も可）

(2) (c) $\mathrm{E}[\,X - p\,] \times \mathrm{E}[\,Y - q\,]$

(d) $\mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,]$

問 3 (30=10*3).　【教科書「統計と確率の基礎」2 章練習問題問 4，スライド第 8 回，レポート 3】

(1) $p' = 0$,　$\mathrm{V}[\,X\,] = \dfrac{1-p}{p^2}$

(2) $\mathrm{P}[\,Y = 0\,] = e^{-\lambda}$,　$\mathrm{E}[\,Y\,] = \lambda$

(3) $\mathrm{P}[\,Z = 0\,] = \mathrm{P}[\,X = 1,\ Y = 0\,] + \mathrm{P}[\,X = 0\,] = \dfrac{1}{2}(e^{-\lambda} + 1)$,

$\mathrm{E}[\,Z\,] = \dfrac{1}{2}\mathrm{E}[\,2Y\,] + \dfrac{1}{2}\mathrm{E}[\,0\,] = \mathrm{E}[\,Y\,] = \lambda$