慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	50 分	分
平成 28 年 2 月 3 日 (水) 3 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 2	氏　名			

注意：答案用紙は裏を使ってはならない．解答は答案用紙の表がわに収めよ．また，答案用紙おもて面**右上に，登録した時限（３または４）を必ず**明記すること．

問１．　以下は，レポート１を一部書き換えた文章である．この文章の記号と設定の下で，その下の小問に答えよ．答案用紙はおもてに結果だけを書き，裏を使わないこと．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ を考える．0 を裏，1 を表と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．

無限列の全体集合 Ω の部分集合のうちで有限項だけで決まるもの $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ．A を指定するのに十分な回数の硬貨投げの有限繰り返しを考えると，表と裏がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ として A に対応する有限硬貨投げの集合の確率を計算できる．このとき，無限列上の確率測度 P であって，どの A でもこの計算結果が $\mathrm{P}[\,A\,]$ に等しくなるものがあることが知られている．ここで，Ω 上の確率測度 P とは，Ω の部分集合を集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする実数値関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ であって，コルモゴロフの公理を満たすものを言うのであった．

この確率空間の上の確率変数列 $\{W_n\}$ を，$\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $W_0(\omega) = 0$，および，$n \geqq 1$ のとき $W_n(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2s_i - 1)$ で定義して,（原点 0 を出発点とする）単純ランダムウォークと呼ぶ．単純ランダムウォークは原点から出発して硬貨を投げる毎に表が出れば右へ，裏が出れば左へ 1 ずつ動くすごろくと考えることができる．

無限列の集合 Ω の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を考える必要性は，たとえば,『このすごろくが -2 のマス目に達する前に 1 のマス目に達する事象』を D とおくとき，D は，すごろく板の中の，座標で $-2, -1, 0, 1$ の 4 個のマス目があれば表せる事象なのに，有限回の硬貨投げの繰り返しの確率空間では表せないことでわかる．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ によって，D を次のように有限項で決まる事象たちの可算無限個の排反な和集合で表すことでその確率を計算できる．$D_0 = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_1 = 1\}$，および，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $D_n = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_{2i-1} = 0,\ s_{2i} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ s_{2n+1} = 1\}$ とおくと，これら可算無限個の集合を用いて $D = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ が成り立つ．他方 D_n たちは互いに共通部分を持たないので，P の σ 加法性から $\mathrm{P}[\,D\,] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,D_n\,]$ である．整数 a に対して，初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n = a$ となる最小の n を T_a とおくと，事象 D は $D = \{T_1 < T_{-2}\}$ と簡単明瞭に書ける．

単純ランダムウォークには種々の興味深い性質がある．その一つに反射原理がある．それによると，$a > b$ を満たす自然数 a と b に対して $\mathrm{P}[\,W_n \leqq b,\ T_a \leqq n\,] = \mathrm{P}[\,W_n \geqq 2a - b\,]$ が成り立つ．

(1) 有限回の硬貨投げで決まるようなどの無限硬貨投げの事象 $A \subset \Omega$ の確率 $\mathrm{P}[\,A\,]$ も有限回の硬貨投げの対応する確率に等しいとき，1 つの**固定した要素** $\omega = (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega$ だけからなる集合（根元事象）$A = \{\omega\}$ の確率は 0 になる．次の『』内が証明になるように空欄を埋めよ．

『任意の自然数 n に対して $A_n = \{(r_1, r_2, \ldots) \in \Omega \mid r_1 = s_1,\ \ldots,\ r_n = s_n\} \subset \Omega$ は n 回の硬貨投げで決まるから，$\mathrm{P}[\,A_n\,] = \boxed{\text{(a)}}$【$n$ を含む数式を解答】である．いっぽう，注目している集合 A は A_n の部分集合なので，コルモゴロフの公理からすぐに証明できる性質の一つ $\boxed{\text{(b)}}$【数式や記号を含まない用語を解答】から $\mathrm{P}[\,A\,] \leqq \mathrm{P}[\,A_n\,]$ である．これらを合わせた式が任意の n で成り立ち，かつ，コルモゴロフの公理の中の条件の一つ

$\boxed{\text{(c)}\qquad}$【数式や記号を含まない用語を解答】が成り立つためには$\boxed{\text{(d)}\qquad}$【Aを含む数式を解答】でなければならない.』

(2) 共分散 $\mathrm{Cov}(W_{18}, W_{13}) = \mathrm{E}[\,(W_{18} - \mathrm{E}[\,W_{18}\,])(W_{13} - \mathrm{E}[\,W_{13}\,])\,]$ を計算せよ. 答案用紙は計算結果の実数値だけを書け.

(3) $\mathrm{P}[\,D\,]$ を計算して既約分数で表せ.

(4) 単純ランダムウォークが5歩目までにマス目2をとおり, かつ, 5歩目では1以下のマス目にいる確率を計算して既約分数で表せ.

問2. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実確率変数 $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとは, 関数 $\rho\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ で定義するとき, X の値の分布が ρ を密度関数とする実数上の確率であることであり, $\mathrm{P}[\,X \geqq a\,] = \displaystyle\int_a^\infty \rho(x)\,dx$ がすべての実数 a に対して成り立つことが同値である. 以下の問に答えよ. 答案用紙はおもてに結果だけを書き, 裏を使わないこと.

(1) $\mathrm{P}[\,X \geqq 0\,]$ はいくらか.

(2) コルモゴロフの公理の中の全測度1の条件から, ρ が確率測度の密度関数であるためには $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ が成り立つ必要がある. その証明の一つに, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって I^2 の重積分の積分変数を変数変換して初等関数の範囲で積分を実行する方法がある. この証明方針の鍵になる積分変数変換のヤコビ行列の計算

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad} & \boxed{\qquad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\qquad} \end{pmatrix}$$

の空欄を埋めよ. 答案用紙は答えだけを行列の形で $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$ のように書くこと.

(3) 実確率変数 X と Y の結合分布の密度は $\mathrm{P}[\,X \geqq a,\ Y \geqq b\,] = \displaystyle\int_{[a,\infty)\times[b,\infty)} \rho_{XY}(x,y)\,dxdy$ がすべての実数の組 (a,b) に対して成り立つ関数 ρ_{XY} である. X と Y が独立でともに $N(0,1)$ に従うとき, $\rho_{XY}(x,y)$ を問2冒頭の記号 ρ と x と y だけを用いて表せ. 答案用紙は答えだけを書くこと.

(4) 自然数 n に対して, $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ を独立同分布な実確率変数列で, X_1 が $N(0,1)$ に従うとし, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく. S_n の分散の計算 $\mathrm{V}[\,S_n\,] = \displaystyle\sum_{i=1}^n \boxed{\qquad} = n$ の空欄を埋める X_i を含む数式を答えよ. また, この式の最初の等号に用いる性質を意味する句「独立な確率変数の和の分散の$\boxed{\qquad}$」の空欄を答えよ. 答案用紙は答えだけを書くこと.

(5) S_{13} と S_{18} の共分散 $\mathrm{Cov}(S_{13}, S_{18})$ の計算の途中経過

$$\mathrm{Cov}(S_{13}, S_{18}) = \cdots = \sum_{i=\boxed{\text{(a)}}}^{\boxed{\text{(b)}}} \mathrm{E}[\,X_i - \mathrm{E}[\,X_i\,]\,] \times \mathrm{E}[\,S_{13} - \mathrm{E}[\,S_{13}\,]\,] + \mathrm{V}[\,\boxed{\text{(c)}\quad}\,] = \cdots$$

$$= \mathrm{V}[\,\boxed{\text{(c)}\quad}\,] = \cdots$$

において空欄 (a)(b)(c) を埋めよ. ただし, (a) と (b) は数値, (c) は S を用い X を用いない数式で埋めよ. 答案用紙には答えだけを $\underline{\text{(a) } 1000 \ \ \text{(b) } -20 \ \ \text{(c) } S_T}$ のように書くこと.

問 1 (50=20+10*3).

(1) $\underline{\text{(a) } 2^{-n}}$, $\underline{\text{(b) 単調性}}$, $\underline{\text{(c) 非負値性}}$, $\underline{\text{(d) P}[\,A\,]=0}$　【$\mathrm{P}[\,A\,] \geqq 0$ は不可】

(2) $X_i(s_1,\ldots)=2s_i-1$ とおくと X_i, $i=1,2,\ldots$, は独立確率変数列で，$\mathrm{E}[\,X_i\,]=0$，$\mathrm{V}[\,X_i\,]=\mathrm{E}[\,X_i^2\,]=1$ を満たす．独立確率変数列の和の分散の加法性から $\mathrm{V}[\,W_{13}\,]=\sum_{i=1}^{13}\mathrm{V}[\,X_i^2\,]=13$．
さらに，$W_{18}-W_{13}=\sum_{i=14}^{18}X_i$ の中の X_i たちは $W_{13}=\sum_{i=1}^{13}X_i$ の中の X_i たちと共通のものがないので，$\mathrm{E}[\,(W_{18}-W_{13})\,W_{13}\,]=0$．問 2(5)(4) と同様に，
$\mathrm{Cov}(W_{18},W_{13})=\mathrm{V}[\,W_{13}\,]=\sum_{i=1}^{13}\mathrm{V}[\,X_i\,]=\underline{13}$.

(3) $\mathrm{P}[\,D\,]=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-2n-1}=\dfrac{\frac12}{1-\frac14}=\underline{\dfrac{2}{3}}$.

(4) 反射原理において $n=5$, $a=2$, $b=1$, とおくと $\mathrm{P}[\,W_5\leqq 1,\ T_2\leqq 5\,]=\mathrm{P}[\,W_5\geqq 3\,]$．左辺が求める値で，右辺の中の事象が成り立つのは 5 歩のうち -1 が 1 回以内（$+1$ が 4 回以上）の場合だから $2^5=32$ 通りのうち 6 とおり．よって求める既約分数は $\dfrac{6}{32}=\underline{\dfrac{3}{16}}$

問 2 (50=10*5).

(1) $\underline{\mathrm{P}[\,X\geqq 0\,]=\dfrac{1}{2}}$

(2) $$\underline{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}}$$

(3) $\underline{\rho_{XY}(x,y)=\rho(x)\rho(y)}$

(4) $\mathrm{V}[\,S_n\,]=\sum_{i=1}^{n}\underline{\mathrm{V}[\,X_i\,]}$，独立な確率変数の和の分散の $\underline{\text{加法性}}$　【σ 加法性は不可．集合算では無限和を考えるので σ 加法性という概念があるが，実数の和は有限個しか定義がないので σ 加法性と呼べる概念はない.「級数と他の演算を交換できること」は極限定理や収束定理などと呼ぶことになる．】

(5) $$\mathrm{Cov}(S_{13},S_{18})=\sum_{i=\underline{\text{(a) }14}}^{\overline{\text{(b) }18}}\mathrm{E}[\,(X_i-\mathrm{E}[\,X_i\,])\,]\,\mathrm{E}[\,(S_{13}-\mathrm{E}[\,S_{13})\,]\,]+\mathrm{V}[\,\underline{\text{(c) }S_{13}}\,]$$