慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	50 分	
平成 28 年 07 月 29 日 (金) 2 時限施行		学部　　学科　　年　　組		
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	確率論入門 1	氏　名		

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　集合 $\Omega = \{1,2,3,4\}$ を全体集合（全事象）とし，Ω の部分集合全てを要素に持つ集合（Ω の部分集合全てを集めた集合族）$\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度 $\mathrm{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ について以下の問いに答えよ．答案用紙はおもて面に答だけを書け．なお空集合は $\emptyset$ と書く．

i) この確率測度 P が $\mathrm{P}[\ \{1,2\}\ ] = 0.3$ を満たすとき，$x = \mathrm{P}[\ \{1,3\}\ ] + \mathrm{P}[\ \{1,4\}\ ]$ がとり得る値の範囲を答えよ．答案用紙は**おもて**面に答だけを書け．

ii) 上の小問のとおり，P が $\mathrm{P}[\ \{1,2\}\ ] = 0.3$ を満たす確率測度である（コルモゴロフの公理を満たす）というだけでは P の値のとりかたは 1 つに決まらないが，P が $\mathrm{P}[\ \{1,2\}\ ] = 0.3$ を満たすとき，$\mathrm{P}[\ A\ ]$ の値が1 **つに決まる**集合 A を $\mathcal{F}$ の要素の中から全て選び，$\underline{\mathrm{P}[\ \{1,2\}\ ] = 0.3}$, $\underline{\mathrm{P}[\ \{5\}\ ] = 100}$, $\ldots$ のように答案用紙**おもて**面に等式の形で列挙せよ．

iii) 講義やレポートの説明を思い出すと，この問いの確率空間 (Ω, P) は表が出る確率が p の硬貨を 2 回投げる試行における確率を表わすことが（Ω の各要素を，表表，表裏，裏表，裏裏の各試行に対応させることで）できる．ある対応のさせ方において，$\{1,2\}$ が 1 回目が表という事象で，かつ，$\{1,3\}$ が 2 回目が表という事象に対応するとき，確率 $\mathrm{P}[\ \{2,3\}\ ]$ を p を用いて表せ．答案用紙は**おもて**面に答だけを書け．

問２．　次の 2 段落はレポート問題の一部である．この内容に関して，その下の問いに答えよ．答案用紙はおもて面に答だけを書け．

> M を 1 より大きい整数とする．M 個の同等の処理能力を持つ窓口のあるサービス施設（空港のカウンターやみどりの窓口やスーパーのレジなど）があり，自分の前に合計 N 人の客が待つとき，窓口が客を捌く仕組みとして，列を一つにして処理の終わった窓口に次の客が進む一列並びと，窓口毎に並ぶ並列並びがある．両者の違いを講義や教科書で説明した視点で考える．
>
> 客 i の窓口での処理に要する時間を S_i とおく．S_i は i について独立な確率変数で，i によらない共通の分布を持ち，特にその平均 τ と標準偏差 σ（分散の平方根）が i によらず共通とする．自分の待ち時間は教科書によると，一列並びは $T^{(1)} = \dfrac{1}{M}(S_1 + S_2 + \cdots + S_N)$，並列並びは $T^{(2)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_{N/M}$，となる．

i) 2 種類の並び方の待ち時間の標準偏差の比 $\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{V}[\ T^{(1)}\ ]}}{\sqrt{\mathrm{V}[\ T^{(2)}\ ]}}$ を答えよ．

答は答案用紙の**おもて**面に，$\underline{\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}} = \cdots}$ のように答だけを書け．

ii) 期待値の線形性と，独立確率変数の分散の加法性に関連して，X_i, $i = 1,2,3$, を 3 つの独立な実数値確率変数たちとし，それらの期待値をそれぞれ $m_i = \mathrm{E}[\ X_i\ ]$, $i = 1,2,3$, 分散をそれぞれ $v_i = \mathrm{V}[\ X_i\ ]$, $i = 1,2,3$, とおくとき，$Y = 3X_1 - 4X_2 - 5X_3$ で定義される実数値確率変数 Y の期待値 $\mathrm{E}[\ Y\ ]$ と分散 $\mathrm{V}[\ Y\ ]$ を m_i たちと v_i たちを用いて表せ．

答は答案用紙の**おもて**面に，$\underline{\mathrm{E}[\,Y\,]=\cdots}$, $\underline{\mathrm{V}[\,Y\,]=\cdots}$ のように答だけを書け.

問３． 以下の空欄 (a)–(c) を**変形の下にある指示に従って**適切な数式で埋めよ．埋めるべき数式を $\underline{\text{(a)} \ldots}$, $\underline{\text{(b)} \ldots}$, $\underline{\text{(c)} \ldots}$ のように答案用紙のおもて面に書け.

i) λ を正の実数とする．以下は，平均 λ のポワッソン分布に従う確率変数 N の分散 $\mathrm{V}[\,N\,]$ の計算の一例の概要である.（$\mathrm{E}[\,N\,]=\lambda$ であることは既知とし，解答の参考のため，各行の右欄にその行に至る変形の根拠の概略を注記している.）

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}[\,N\,] &= \mathrm{E}[\,\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad}\,] + \mathrm{E}[\,N\,] - \mathrm{E}[\,N\,]^2 && \text{（分散の定義と期待値の線形性）}\\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \boxed{\text{(b)}\qquad\qquad\qquad} + \lambda - \lambda^2 && \text{（ポワッソン分布の定義と 0 の項の除去）}\\
&= \lambda. && \text{（変数変換 } k=\ell+2 \text{ と指数関数の展開）}
\end{aligned}$$

(a) は N の多項式を**因数分解**した結果を，(b) は k と λ を含む数式を，それぞれ答案用紙の**おもて**面に書け.

ii) $0<p<1$ とする．以下は，表が出る確率が p の硬貨を，表が 6 回出るまで投げた時点での裏の出た回数を X とおくときのその期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ の計算の一例の概要である．各行の右欄はその行に至る変形の根拠の概略の注記である.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,X\,] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \times {}_{k+5}\mathrm{C}_k p^6 (1-p)^k && \text{（期待値の定義と 0 の項の除去）}\\
&= \frac{1}{120}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+6)!}{\ell!} p^6 (1-p)^{\ell+1} && \text{（変数変換 } k=\ell+1 \text{ と公式 } {}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}\text{）}\\
&= \frac{6}{p} - 6. && \text{（級数の和の公式 } \sum_{\ell=0}^{\infty} {}_{\ell+6}\mathrm{C}_\ell \boxed{\text{(c)}\qquad\qquad} = 1\text{）}
\end{aligned}$$

(c) に ℓ と p を含む数式を答案用紙の**おもて**面に書け.

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　2016/07/29 服部哲弥

問 1 (40=10+20+10).　【スライド第 2 回】

i) $\underline{0.7 \leqq x \leqq 1.3}$.　【加法性と全測度 1 から $x = \mathrm{P}[\,\{1\}\,] + 1 - \mathrm{P}[\,\{2\}\,]$. 非負値性と加法性と $\mathrm{P}[\,\{1,2\}\,] = 0.3$ から $-0.3 \leqq \mathrm{P}[\,\{1\}\,] - \mathrm{P}[\,\{2\}\,] \leqq 0.3$.】

ii) $\underline{\mathrm{P}[\,\emptyset\,] = 0}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{1,2\}\,] = 0.3}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{3,4\}\,] = 0.7}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1}$.

iii) $\underline{\mathrm{P}[\,\{2,3\}\,] = 2p(1-p)}$　【2 は表裏という結果，3 は裏表という結果に対応する.】

問 2 (30=10*3).　【教科書「統計と確率の基礎」2 章 §3, 3 章 §2】

i) $\underline{\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{M}}}$

ii) $\underline{\mathrm{E}[\,Y\,] = 3m_1 - 4m_2 - 5m_3}$, $\underline{\mathrm{V}[\,Y\,] = 9v_1 + 16v_2 + 25v_3}$

問 3 (30=10*3).　【教科書「統計と確率の基礎」6 章練習問題 問 3／1 章練習問題 問 4】

(a) $\underline{N(N-1)}$　(b) $\underline{k(k-1)\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$　または $\underline{\dfrac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}}$　(c) $\underline{(1-p)^{\ell}p^7}$