慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	50 分	
平成 29 年 07 月 22 日 (土) 1 時限施行	学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	確率論入門 1	氏　名		

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　集合 $\Omega = \{1,2,3,4\}$ を全体集合（全事象）とし，Ω の部分集合全てを要素に持つ集合（Ω の部分集合全てを集めた集合族）$\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ があり，$A = \{1,2\}$ および $B = \{1,3\}$ とおくとき，$\mathrm{P}[\,A\,] = 0.3$ と $\mathrm{P}[\,B\,] = 0.4$ を満たすとする．以下の問に答えよ．答案用紙はおもて面に答だけを書け.

i) 条件の下で $x = \mathrm{P}[\,\{4\}\,]$ がとり得る値の範囲を答えよ．答案用紙は**おもて**面に答だけを $\underline{0 \leqq x \leqq 1}$ のように書け.

ii) 上の小問で見たとおり，条件の下で P の値が 1 つに決まらない集合（事象）があるが，それは $\mathcal{F}$ に属する 16 個の事象のうち何個か．答案用紙**おもて**面に個数を書け.

iii) 最初の条件だけでは P の値が決まらない集合があることを見たが，事象 $A = \{1,2\}$ と $B = \{1,3\}$ が独立という条件 ($\mathrm{P}[\,A \cap B\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\,\mathrm{P}[\,B\,]$) も追加すると，P は決まる（定義域 $\mathcal{F}$ に属するすべての集合に対して P の値が決まる）．このとき，$x = \mathrm{P}[\,\{4\}\,]$ の値を答案用紙**おもて**面に $\underline{x = 0}$ のように書け.

問２．　M を 1 より大きい整数，N を M の倍数とする．M 個の同等の処理能力を持つ窓口のあるサービス施設（空港のカウンターやみどりの窓口やスーパーのレジなど）があり，自分の前に合計 N 人の客が待つ状況を考える．次の段落はレポート問題の一部である．この内容に関して，その下の問に答えよ．答案用紙はおもて面に答だけを書け.

> 窓口が客を捌く仕組みとして，列を一つにして処理の終わった窓口に次の客が進む一列並びと，窓口毎に並ぶ並列並びがある．両者の違いを講義や教科書で説明した視点で考える．客 i の窓口での処理に要する時間を S_i とおく．S_i は i について独立な確率変数で，i によらない共通の分布を持ち，特にその平均 τ と標準偏差 σ（分散の平方根）が i によらず共通とする．自分の待ち時間は教科書によると，一列並びは $T^{(1)} = \dfrac{1}{M}(S_1 + S_2 + \cdots + S_N)$，並列並びは $T^{(2)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_{N/M}$，となる.

i) 一列並びの待ち時間の標準偏差 $\overline{\sigma}^{(1)} = \sqrt{\mathrm{V}[\,T^{(1)}\,]}$ を計算して $N,\ M,\ \tau,\ \sigma$ で表せ．答は答案用紙の**おもて**面に，$\underline{\overline{\sigma}^{(1)} = \cdots}$ のように答だけを書け.

ii) 一列並びと並列並びの待ち時間の標準偏差の**比** $\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}}$ を計算して $N,\ M,\ \tau,\ \sigma$ で表せ．答は答案用紙の**おもて**面に，$\underline{\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}} = \cdots}$ のように答だけを書け.

iii) 世の中には，弱り目に祟り目（悪い運は重なる）という落ち込みや，自分はツイている（幸運が続いている）という思い込みがあるが，自分の前の N 人すべてが等しい手間がかかるがその時間は分布しかわからない，つまり今まで仮定していた S_i たちの独立性を否定して，平均 τ 標準偏差 σ である1 **つの**確率変数 $S:\ \Omega \to \mathbb{R}$ と関数（確率変数）として同一 ($S = S_1 = S_2 = \cdots = S_N$) という架空の世界を考える．一列並びと並列並びの定義やそれぞれの場合の自分の待ち時間の式は最初の設定と変わらないとするとき，この架空の世界

での一列並びの待ち時間の標準偏差 $\hat{\sigma}^{(1)}$ と現実の世界（の教科書モデル）の一列並びの待ち時間の標準偏差 $\overline{\sigma}^{(1)}$ の比 $\dfrac{\hat{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(1)}}$ を計算して $N,\ M,\ \tau,\ \sigma$ で表せ．答は答案用紙の**おもて**面に，$\underline{\dfrac{\hat{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(1)}} = \cdots}$ のように答だけを書け．

問３．　以下の空欄 (a)–(d) を適切な数式で埋めよ．埋めるべき数式を $\underline{\text{(a)} \ldots}$, $\underline{\text{(b)} \ldots}$, $\underline{\text{(c)} \ldots}$, $\underline{\text{(d)} \ldots}$ のように答案用紙のおもて面に書け．

i) λ を正の実数とする．以下は，平均 λ のポワッソン分布に従う確率変数 N の分散 $\mathrm{V}[\,N\,]$ の計算の概要である．($\mathrm{E}[\,N\,] = \lambda$ であることは既知とし，各行の右欄にその行に至る変形の根拠の概略を注記している．)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}[\,N\,] &= \mathrm{E}[\,N(N-1)\,] + \mathrm{E}[\,N\,] - \mathrm{E}[\,N\,]^2 && \text{（分散の定義と期待値の線形性）} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 && \text{（ポワッソン分布の定義と 0 の項の除去）} \\
&= \boxed{\text{(a)}\qquad} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda - \lambda^2 && \text{（変数変換 } k = \boxed{\text{(b)}\qquad} \text{ と式の整理）} \\
&= \lambda. && \text{（指数関数のマクローリン級数）}
\end{aligned}
$$

ii) $0 < p < 1$ とする．以下は，表が出る確率が p の硬貨を繰り返し投げて，初めて表が出るまでに裏の出た回数を X とおくとき，その期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ の計算の概要である．各行の右欄はその行に至る変形の根拠の概略の注記である．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,X\,] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathrm{P}[\,X = k\,] && \text{（期待値の定義）} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(1-p)^k && \text{（幾何分布の代入と 0 の項の除去）} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p(1-p)^{n+1} && \text{（変数変換 } k = n+1\text{）} \\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k\,p(1-p)^k \\
&\quad + (1-p)p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k && \text{（変数変換 } n = k \text{ と式の展開と整理）} \\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k\,p(1-p)^k \\
&\quad + 1 - p && \left(1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} \text{ に } r = \boxed{\text{(c)}\qquad} \text{ を代入}\right)
\end{aligned}
$$

$1, 2$ 行目と最終行を見比べて整理すると $\boxed{\text{(d)}\quad} \times \mathrm{E}[\,X\,] = 1 - p$ となって，$\mathrm{E}[\,X\,]$ を p で具体的に表せる．

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　2017/　/　服部哲弥

問 1 (30=10*3).　【スライド第 2 回＋教科書「統計と確率の基礎」1 章練習問題補足 1（スライド第 4 回）】

i) $\underline{0.3 \leqq x \leqq 0.6}$.　【加法性と全測度 1 から $\mathrm{P}[\,\{1\}\,] = x - 0.3$, $\mathrm{P}[\,\{2\}\,] = 0.6 - x$, $\mathrm{P}[\,\{3\}\,] = 0.7 - x$, $\mathrm{P}[\,\{4\}\,] = x$, なので，確率の非負値性から可能な範囲が決まる.】

ii) $\underline{10}$.　【1 つに決まるのは，$\mathrm{P}[\,\emptyset\,] = 0$, $\mathrm{P}[\,A\,] = 0.3$, $\mathrm{P}[\,A^c\,] = 0.7$, $\mathrm{P}[\,B\,] = 0.4$, $\mathrm{P}[\,B^c\,] = 0.6$, $\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$, の 6 個．決まらないのは $16 - 6 = 10$.
$11, 12$ の誤答は，空集合や全体集合を忘れた可能性に注意.】

iii) $\underline{x = 0.42}$.　【A と B が独立ならば $\sigma[A] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ と $\sigma[B] = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ が独立なので，特に，$\mathrm{P}[\,\{4\}\,] = \mathrm{P}[\,A^c \cap B^c\,] = (1 - \mathrm{P}[\,A\,])(1 - \mathrm{P}[\,B\,]) = 0.7 \times 0.6$.】

問 2 (30=10*3).　【教科書「統計と確率の基礎」2 章 §3, 3 章 §2】

i) $\underline{\overline{\sigma}^{(1)} = \dfrac{\sqrt{N}}{M}\sigma}$

ii) $\underline{\dfrac{\overline{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{M}}}$

iii) $\underline{\dfrac{\hat{\sigma}^{(1)}}{\overline{\sigma}^{(1)}} = \sqrt{N}}$

【$\hat{T}^{(1)} = \hat{T}^{(2)} = \dfrac{N}{M}S$ だから，$\mathrm{V}[\,\hat{T}^{(1)}\,] = \mathrm{V}[\,\hat{T}^{(2)}\,] = \dfrac{N^2}{M^2}\mathrm{V}[\,S\,]$ なので，$\hat{\sigma}^{(1)} = \hat{\sigma}^{(2)} = \dfrac{N}{M}\sigma$】

問 3 (40=10*4).　【教科書「統計と確率の基礎」6 章練習問題 問 3 ＋ 2 章練習問題 問 4】

(a) $\underline{\lambda^2 e^{-\lambda}}$　(b) $\underline{n + 2}$　(c) $\underline{1 - p}$　(d) $\underline{p}$