慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	50 分	
平成 30 年 1 月 24 日 (水)　時限施行		学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 2	氏　名			

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．
また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　以下は，レポート１を一部書き換えた文章である．この文章の記号と設定の下で，その下の小問に答えよ．答案用紙はおもてに結果だけを書き，裏を使わないこと．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ を考える．0 を裏，1 を表と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．

無限列の全体集合 Ω の部分集合のうちで有限項だけで決まるもの $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ．集合 A を決めるのに十分な回数を n として n 回硬貨投げを考えると，表と裏それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ として A の確率を計算できる．このとき，無限列集合 Ω 上の確率測度 P であって，どの A でも有限硬貨投げによる計算結果が $\mathrm{P}[\,A\,]$ に等しくなるものがあることが知られている．ここで，Ω 上の確率測度 P とは，Ω の部分集合を集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする実数値関数 $\mathrm{P}\colon\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ であって，コルモゴロフの公理を満たすものを言うのであった．有限項だけで決まる部分集合 $A \subset \Omega$ に対して $\mathrm{P}[\,A\,]$ の値が計算できるということは，そのような集合が $\mathcal{F}$ の要素である，つまり $A \in \mathcal{F}$ を意味する．

この確率空間の上の確率変数列 $\{W_n\}$ を，$\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $W_0(\omega) = 0$，および，$n \geqq 1$ のとき $W_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2s_k - 1)$ で定義して，（原点 0 を出発点とする）単純ランダムウォークと呼ぶ．単純ランダムウォークは原点から出発して硬貨を投げる毎に表が出れば右へ，裏が出れば左へ 1 ずつ動くすごろくと考えることができる．なお，W_n たちが確率変数であるとは，任意の実数 a に対して，$\{\omega \in \Omega \mid W_n(\omega) \geqq a\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことを言う．この式を慣例通り以下 ω を略して $\{W_n \geqq a\} \in \mathcal{F}$ と書く．W_n は整数値なので，確率変数の定義は，任意の整数 i に対して $\{W_n = i\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことと同値である.（これは容易に証明できることである.）

無限列の集合 Ω の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を考える必要性は，たとえば,『このすごろくがマス目 2 に達する前に負のマス目に達する事象』を D とおくとき，D は，すごろく板の中の，座標で $-1, 0, 1, 2$ の 4 個のマス目があれば表せる事象なのに，有限回の硬貨投げの繰り返しの確率空間では表せないことでわかる．無限列の集合の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ によって，D を有限項で決まる事象たちの可算無限個の排反な和集合で表すことでその確率を計算できる．

整数 a に対して，初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n = a$ となる最小の n を T_a とおく．どの n でも $W_n(\omega) = a$ とならない試行 $\omega \in \Omega$ に対しては $T_a(\omega) = \infty$ と書くことにすると，関数 $T_a\colon\ \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が定義される．この記号を用いると，さきほどの事象 D は $D = \{T_2 > T_{-1}\}$ と簡単明瞭に書ける．

i) 集合 $B = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega \mid s_1 + s_2 + s_3 = 1\} \subset \Omega$ について $\mathrm{P}[\,B\,]$ を計算して既約分数で表し，結果を答案用紙のおもて面に書け．

ii) 文章中の集合 D について $\mathrm{P}[\,D\,]$ を既約分数で表し，結果を答案用紙のおもて面に書け．

iii) 次の『』内が $\{W_3 = 1\} \in \mathcal{F}$ の証明になるように空欄を埋めたときに，下線部を（空欄を数値の列で埋めた状態で，下線部全部を）答案用紙のおもて面に書け.（最初の空欄は答えなくて良い.）

『文章中の W_n の定義を代入すると

$\{W_3 = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid W_3(\omega) = 1\} = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid 2s_1 + 2s_2 + 2s_3 = \boxed{}\}$

$\qquad\qquad = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_2, s_3) \in \{(\boxed{}), (\boxed{}), (\boxed{})\}\}$

となるが，右辺を見ると Ω の要素である各無限列がこの集合の要素であるかどうかはその無限列の最初の 3 項を見ればわかる．よって，$\mathcal{F}$ の定義から $\{W_3 = 1\} \in \mathcal{F}$ である.』

iv) $\varepsilon > 0$ のとき成り立つ不等式

(*) $\varepsilon^2 \mathrm{P}[\ \left|\frac{1}{n}W_n\right| \geqq \varepsilon\ ] \leqq \frac{1}{n^2}\mathrm{E}[\ W_n^2\ ] = \frac{1}{n}$

と確率の非負性と挟み撃ちの原理から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}[\ \left|\frac{1}{n}W_n\right| \geqq \varepsilon\ ] = 0$（大数の弱法則）が成り立つ．不等式 (*) は集合 A の定義関数 $\mathbf{1}_A :\ \Omega \to \mathbb{R}$（$\omega \in A$ のとき $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$，そうでないとき $= 0$ となる確率変数）を用いて次のように証明できる．(以下，読みやすさのため，一部で $\frac{1}{n}$ を n^{-1} と書く.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\ (\tfrac{1}{n}W_n)^2\ ] &= \mathrm{E}[\ (\tfrac{1}{n}W_n)^2\, \mathbf{1}_{\{n^{-1}|W_n| \geqq \varepsilon\}}\ ] + \mathrm{E}[\ (\tfrac{1}{n}W_n)^2\, \mathbf{1}_{\{n^{-1}|W_n| < \varepsilon\}}\ ] \\
&\geqq \mathrm{E}[\ \boxed{}\ ] \qquad + 0 \\
&= \varepsilon^2 \mathrm{P}[\ n^{-1}|W_n| \geqq \varepsilon\ ]
\end{aligned}$$

この式変形が証明の適切な手順を与えるような，空欄に入れるべき式を答案用紙のおもて面に書け.

問 2． ガウス積分に関する以下の式を計算して a と n 以外の変数を用いない（積分等を用いない）整理された答だけを答案用紙のおもて面に書け．なお，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$ である．また，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のとき $\frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) = x^2 - xy + y^2$ である．この他，階乗の類似の記号 $(2k+1)!! = (2k+1) \times (2k-1) \times (2k-3) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1$ を用いても良い.

i) a を正の実数とするとき，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}dx$.

ii) n を自然数とするとき，$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2}dx$.

iii) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 + xy - y^2} dx\, dy$.

iv) n を自然数，a を正の実数とするとき，
$\int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 e^{-a\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/2} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$.

問 3．

i) n を自然数，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．非負整数値の値をとる 2 つの独立同分布確率変数 X と Y があり，それぞれが従う分布は $\mathrm{P}[\ Z = k\ ] = (1-p)\,p^k,\ k \in \mathbb{Z}_+$ を満たす確率変数 Z の従う分布（パラメータ p の幾何分布 $G(p)$）に等しいとする．$\mathrm{P}[\ X > Y + n\ ]$ を計算して n と p 以外の変数を使わない形で表した結果を答案用紙のおもて面に書け.

ii) X と Y が独立確率変数で，X は期待値が $\mathrm{E}[\ X\ ] = 4$ を満たすポワッソン分布，Y は分散が $\mathrm{V}[\ Y\ ] = 9$ を満たすポワッソン分布とする．このとき，
$X + Y$ は $\boxed{}$ の $\boxed{}$ 分布に従う．この文の空欄を講義に沿って適切に埋めたときに，下線部を（空欄を埋めた状態で，下線部全部を）答案用紙のおもて面に書け.

問 4．

確率論入門 2　期末試験　**略解**　　2018/ 1/24 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $\underline{\dfrac{3}{8}}$ 【$B=\{(s_1,s_2,s_3,\dots)\in\Omega \mid (s_1,s_2,s_3)=(1,0,0)\}\cup\{(s_1,s_2,s_3,\dots)\in\Omega \mid (s_1,s_2,s_3)=(0,1,0)\}\cup\{(s_1,s_2,s_3,\dots)\in\Omega \mid (s_1,s_2,s_3)=(0,0,1)\}$ 】

ii) $\mathrm{P}[\,D\,]=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\ \underline{\frac{2}{3}}$ 【$D=\{0\to -1\}\cup\{0\to 1\to 0\to -1\}\cup\{0\to 1\to 0\to 1\to 0\to -1\}\cup\cdots$ 】

iii) $\underline{\{(s_1,s_2,\dots)\in\Omega \mid (s_1,s_2,s_3)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}\}}$ 【最初の空欄は 4】

iv) $\underline{\varepsilon^2\,\mathbf{1}_{\{n^{-1}|W_n|\geqq\varepsilon\}}}$

問 2 (40=10*4).

i) $\underline{\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}}$ 【$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}dy=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$ 】

ii) $\underline{\sqrt{2\pi}(2n-1)!!}$ 【(i) の両辺を a で n 回微分して $a=1$ とおいて $(-2)^n$ 倍する. 】

iii) $\underline{\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$ 【問題文にある変数変換を積分変数変換として用いたのちにフビニの定理と (i) を用いると,

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2+xy-y^2}dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(u^2+3v^2)/2}du\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3v^2/2}dv=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$ 】

iv) $\underline{\dfrac{n}{a}\left(\dfrac{2\pi}{a}\right)^{n/2}}$ 【和の 2 乗を展開して積分の線形性を用いて分解し各項にフビニの定理を用いて逐次積分に直した上で，奇関数の積分が 0 になることと (i)(ii) を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2e^{-a\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/2}dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}x_i^2e^{-ax_i^2/2}dx_i\times\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-ay^2/2}dy\right)^{n-1}=n\frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^{n}.$$

あるいは，各々が $N(0,\frac{1}{a})$ に従う独立同分布確率変数列 $X_1,\dots,X_n$ を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2e^{-a\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/2}dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n$$
$$=\mathrm{E}[\,(X_1+\cdots+X_n)^2\,]\times\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{n/2}=n\mathrm{V}[\,X_1\,]\times\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{n/2}=\frac{n}{a}\times\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{n/2}.$$ 】

問 3 (20=10*2).

i) $\underline{\dfrac{p^{n+1}}{1+p}}$ 【Y のとりうる値について場合分けして，X と Y の独立性を用いると,

$$\mathrm{P}[\,X>Y+n\,]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[\,X\geqq k+n+1,\ Y=k\,]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[\,X\geqq k+n+1\,]\times\mathrm{P}[\,Y=k\,]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}p^{k+n+1}\,(1-p)p^k=p^{n+1}(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}p^{2k}=\frac{p^{n+1}(1-p)}{1-p^2}=\frac{p^{n+1}}{1+p}$$ 】

ii) $\underline{X+Y\text{ は平均 }13\text{ のポワッソン分布に従う}}$ 【Y はポワッソン分布に従う確率変数なので $\mathrm{V}[\,Y\,]=\mathrm{E}[\,Y\,]$ であり，ポワッソン分布に従う独立確率変数列の和は個々の期待値の和を平均とするポワッソン分布に従う. 】

問 4 (-10).　無記，誤記