**慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）**

| 試験時間 | 50 分 | |
|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 平成 30 年 07 月 31 日 (火) 2 時限施行 | | 学部　　学科　　年　　組 | |
| 担当者名 | 服部　哲弥　君 | 学籍番号 | |
| 科目名 | 確率論入門 1 | 氏　名 | |

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

**問１．**　集合 $\Omega = \{1,2,3\}$ を全体集合とし，$\Omega$ の部分集合全てを集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする集合関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ がある．空集合 $\emptyset$ に対して $\mathrm{P}[\,\emptyset\,] = 0$ であることと $i = 1,2,3$ に対して $\mathrm{P}[\,\{i\}\,] = \dfrac{i}{6}$ であることがわかっているが，最初は（要素が 2 以上ある集合に対する値を未確認なので）確率測度か未確認とする．以下の問に答えよ．答案用紙はおもて面に答だけを書け．

i) P が確率測度であることを確かめる（証明する）ために必要な次の主張 (*) の空欄を記号を使わずに（日本語で）埋めて完成せよ．答案は空欄を埋めた上で**下線部全部**を用紙のおもて面に書け．

(*) $\underline{\Omega \text{ の任意の部分集合 } A \text{ と，} A \text{ と} \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxx}} \text{どの } \Omega \text{ の部分集合 } B \text{ と}}$
$\underline{\text{の組 } (A,B) \text{ に対しても，} \mathrm{P}[\,A \cup B\,] = \mathrm{P}[\,A\,] + \mathrm{P}[\,B\,] \text{ が成り立つ.}}$

ii) (*) は確率測度の定義（コルモゴロフの公理）（の有限集合版）における，集合関数 P に対する 3 つの条件の 1 つに過ぎないが，問 1 冒頭の性質と (*) が確認できれば，残り 2 つも成り立つので，P は確率測度である．たとえば，(*) を繰り返し用いた上で，最後に問 1 冒頭小問 i) の前に与えた条件を用いることで，$\underline{\mathrm{P}[\,\Omega\,] = \mathrm{P}[\boxed{\phantom{xx}}] + \mathrm{P}[\boxed{\phantom{xx}}] + \mathrm{P}[\boxed{\phantom{xx}}] = 1}$ によって全測度が 1 であることを証明できる．3 箇所の空欄各々を具体的な集合で埋めよ．答案は空欄を埋めた上で**下線部全部**を用紙のおもて面に書け．集合の記号はきちんと書くこと．

iii) 以下，この問の P は（(*) が成り立つことが確認されて,）確率測度であるとする．$\mathrm{P}_*$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度で，$\mathrm{P}_*[\,\{1\}\,] = \mathrm{P}_*[\,\{2\}\,] = \mathrm{P}_*[\,\{3\}\,]$ を満たすものとし，$m$ を正の定数とする．このとき，$\Omega$ の各部分集合 $A$ に対して $\mathrm{Q}[\,A\,] = (m+1) \times \mathrm{P}[\,A\,] - m \times \mathrm{P}_*[\,A\,]$ によって集合関数 $\mathrm{Q}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を定義する．Q が**確率測度でない**ような定数 $m$ の具体例と，そのとき Q が確率測度でないことを証明する具体的な集合についての Q の値を示す等式を答えよ．答案は $\underline{m = 1,\ \mathrm{Q}[\,\{1,2,3,4\}\,] = 0}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

**問２．**

i) 事象 $A$ が起きるとき 1，起きないとき 0 となる確率変数（すなわち集合 $A$ の定義関数）を $X$ とするとき，$X$ の分散を計算して事象 $A$ の確率 $\mathrm{P}[\,A\,]$ を用いて表せ．
答案は $\underline{\mathrm{V}[\,X\,] = 2\log(\mathrm{P}[\,A\,])}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

ii) （独立とは限らない）確率変数 $X$ と $Y$ の相関係数 $r(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}$ を $X,\ Y,\ X+Y$ の分散だけで（共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])\,]$ や期待値の記号を用いずに）表せ．答案は $\underline{r(X,Y) = \mathrm{V}[\,X+Y\,]}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

iii) 1 から 6 までの目が等確率で出るサイコロを 1 回投げる．確率変数 $X$ を目が 1 のとき 1 そうでないとき 0，確率変数 $Y$ を目が 6 のとき 1 そうでないとき 0，で定義するとき，共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ を計算せよ．答案は $\underline{\mathrm{Cov}(X,Y) = 3}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

iv) 以下の『』内の文章が，分散が正の確率変数 $X$ と $Y$ の相関係数の取りうる値の範囲を得る議論になるように，空欄を**共分散と分散を用いた式**で埋めよ．答案は $\underline{\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

『期待値の非負値性からどんな実数 $t$ に対しても $\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]-t(Y-\mathrm{E}[\,Y\,]))^2\,]\geqq 0$ である．2 乗を展開し，期待値の線形性を用いてこの不等式を $t$ の 2 次不等式に書き直すと，それが任意の実数 $t$ で成り立つことから $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$ を得る．共分散や分散を相関係数 $r(X,Y)$ で書き直すと，$r(X,Y)$ の取りうる範囲を得る．』

**問 3．** $\lambda$ を正定数とする．以下は，試行数 $n$ 成功確率 $\dfrac{\lambda}{n}$ の 2 項分布 $B(n,\dfrac{1}{n}\lambda)$ に従う確率変数 $N_n$ の，(i) 期待値（平均成功数）が $\lambda$ に等しいことの確認と，(ii) 各自然数 $k$ に対して成功数が $k$ に等しくなる確率の $n=k,k+1,\ldots$ についての数列がポワッソン分布に従う確率変数 $N$ の対応する確率に収束することの，計算の概要である．(i) は各行の右欄に前行からその行への変形の根拠の概略を注記している．$\boxed{公式\,(a)}$，$\boxed{公式\,(b)}$，$\boxed{公式\,(c)}$ を適切な公式で埋めよ．答案は用紙のおもて面に (a) …，(b) …，(c) … のように答だけを書け．なお，記号は変数の代入の指示に合うように注意せよ．

i) 2 項分布 $B(n,\dfrac{1}{n}\lambda)$ の定義から，2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ を用いて

$\mathrm{P}[\,N_n=k\,]={}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ である．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\,N_n\,]\\
&=\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} && \text{（期待値の定義と } k=0 \text{ の項の寄与 } 0\text{）}\\
&=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{n\times(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\ell+1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1-\ell} && \text{（約分と変数変換 } k=\ell+1\text{）}\\
&=\lambda\sum_{\ell=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_\ell\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\ell}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1-\ell} && \text{（} n\times\frac{\lambda}{n} \text{ のくくりだしと 2 項係数の定義）}\\
&=\lambda\times 1^{n-1}=\lambda. && \text{（}\boxed{\text{公式 (a)}}\text{ で } N=n-1,\ x=\frac{\lambda}{n},\ y=1-\frac{\lambda}{n}\text{）}
\end{aligned}
$$

ii) $\mathrm{P}[\,N_n=k\,]={}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k(1-\dfrac{\lambda}{n})^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}(1-\dfrac{\lambda}{n})^n\dfrac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}$ と整理し直して $n\to\infty$ の極限を調べる．

2 つの収束する数列 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\alpha$ と $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\beta$ に対して成り立つ $\boxed{公式\,(b)}$ を，$k-2$ 回（帰納的に）使うことで $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n})=1$，$k-1$ 回使うことで $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{\lambda}{n})^k=1$，を，それぞれ得る．残りの因子は 1 に収束する数列を掛け算する回数が項 $n$ とともに増えるので公式 (b) は直接には使えない．代わりに，指数関数についての $\boxed{公式\,(c)}$ で $x=\lambda$ と置いて得られる式を用いる．以上を用いることで $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}[\,N_n=k\,]=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ を得るが，右辺はポワッソン分布に従う $N$ に対する $\mathrm{P}[\,N=k\,]$ の定義式である．

**問 4．**

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　　　　　　　2018/08/01 服部哲弥

**問 1 (30=10*3).**　　【スライド第 2 回，レポート１】

i) $\Omega$ の任意の部分集合 $A$ と，$A$ と共通部分を持たないどの $\Omega$ の部分集合 $B$ との組 $(A,B)$ に対しても，$\mathrm{P}[\,A\cup B\,]=\mathrm{P}[\,A\,]+\mathrm{P}[\,B\,]$ が成り立つ.
【「独立」という言葉が入っている解答は不可】

ii) $\mathrm{P}[\,\Omega\,]=\mathrm{P}[\,\{1\}\,]+\mathrm{P}[\,\{2\}\,]+\mathrm{P}[\,\{3\}\,]=1$　　【中括弧の無い回答は不可】

iii) たとえば，$m=2,\ \mathrm{Q}[\,\{1\}\,]=-\dfrac{1}{6}$，$m=4,\ \mathrm{Q}[\,\{1,2\}\,]=-\dfrac{1}{6}$，など.
【$m>1,\ \mathrm{Q}[\,\{1\}\,]=\dfrac{1-m}{6}$，または，$m>3,\ \mathrm{Q}[\,\{1,2\}\,]=\dfrac{3-m}{6}$ を満たすものが正解. レポート１略解 (7) 解答例 (b) 参照．加法性と全測度 1 は成り立つので，確率でないのは負値があること．公理からは間接的だが，1 より大きな確率がないことも証明済みなので，$m>1,\ \mathrm{Q}[\,\{2,3\}\,]=\dfrac{m+5}{6}$，または，$m>3,\ \mathrm{Q}[\,\{3\}\,]=\dfrac{m+3}{6}$ を満たすものも正解とする．なお，問題文に $m$ は正としているので，$m$ が負の解答は不可】

**問 2 (40=10*4).**　　【教科書「統計と確率の基礎」2 章 §3, 3 章 §2，レポート２】

i) $\mathrm{V}[\,X\,]=\mathrm{P}[\,A\,]\,(1-\mathrm{P}[\,A\,])$
【$X^2=X,\ \mathrm{E}[\,X\,]=\mathrm{P}[\,A\,]\times 1+\mathrm{P}[\,A^c\,]\times 0=\mathrm{P}[\,A\,],\ \mathrm{V}[\,X\,]=\mathrm{E}[\,X^2\,]-\mathrm{E}[\,X\,]^2$ から】

ii) $r(X,Y)=\dfrac{\mathrm{V}[\,X+Y\,]-\mathrm{V}[\,X\,]-\mathrm{V}[\,Y\,]}{2\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}$
【レポート 2 (5) 参照：$\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{V}[\,X+Y\,]-\mathrm{V}[\,X\,]-\mathrm{V}[\,Y\,])$】

iii) $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\dfrac{1}{36}$　　【教科書「統計と確率の基礎」3 章章末問題 2 参照】

iv) $\mathrm{Cov}(X,Y)^2\leqq \mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]$　　【教科書「統計と確率の基礎」§3.3 参照】

**問 3 (30=10*3).**　　【教科書「統計と確率の基礎」6 章章末問題 問 3，レポート 3】

(a) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} {}_N\mathrm{C}_\ell x^\ell y^{N-\ell}=(x+y)^N$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n b_n=\alpha\beta$　　(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n=e^{-x}$

**問 4 (-10).**