慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	**50** 分		
平成 31 年 01 月 23 日 (火) 6 時限施行		学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 2	氏　名			

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　以下は，レポート１から抜粋して少し書き換えた文章である．この文章の記号と設定の下で，その下の小問に答えよ．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,\ldots\}$ を考える．0 を裏，1 を表と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．

無限列の全体集合 Ω の部分集合のうちで有限項だけで決まるもの $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ．集合 A を決めるのに十分な回数を n として n 回硬貨投げを考えると，表と裏それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ として A の確率を計算できる．このとき，無限列集合 Ω 上の確率測度 P であって，どの A でも有限硬貨投げによる計算結果が $\mathrm{P}[\,A\,]$ に等しくなるものがあることが知られている．この確率空間の上の確率変数列 $\{Z_k\}$ を，$k = 1,2,\ldots$ と $\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $Z_k(\omega) = 2s_k - 1$ で定義し，確率変数列 $\{W_n\}$ を，$W_0 = 0$ および $n = 1,2,\ldots$ に対して $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$ で定義して，原点 0 を出発点とする単純ランダムウォークと呼ぶ．以上の定義の下で $Z_1, Z_2, \ldots$ はそれぞれが期待値 0 で分散 1 の，独立同分布確率変数列であることが証明できることは既知とする．

i) $\mathrm{P}[\,W_3 = 1,\ W_4 = 2\,]$ を（計算してアルファベットを含まない形を）求めよ．答案は用紙のおもて面に答だけを書け．

ii) $\dfrac{1}{n}W_n$ は独立同分布確率変数列の算術平均なので確率論入門 I の大数の弱法則が適用できる．適用した結果得られる数式を書け．答案は用紙のおもて面に 1 行の数式で答だけを書け．

iii) 上の小問の結果の証明には，$\varepsilon > 0$ とするとき，チェビシェフの不等式 $(n\varepsilon)^2 \mathrm{P}[\,\dfrac{1}{n}|W_n| \geqq \varepsilon\,] \leqq \mathrm{E}[\,W_n^2\,]$ を用いることができる．集合 A の定義関数 $\mathbf{1}_A :\ \Omega \to \mathbb{R}$（$\omega \in A$ のとき $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$，そうでないとき $= 0$ となる確率変数）を用いて $\mathrm{P}[\,\dfrac{1}{n}|W_n| \geqq \varepsilon\,] = \mathrm{E}[\,\mathbf{1}_{|W_n| \geqq n\varepsilon}\,]$ と書けることを利用して，このチェビシェフの不等式と呼んだ不等式を証明せよ．答案は用紙のおもて面に証明の要点を示す数式を 2 行以内で書け．

iv) 確率論入門 I の知見のうち，独立確率変数の積の期待値が期待値の積に等しいことと独立確率変数の和の分散は加法性が成り立つことから非負整数 n と m に対して $\mathrm{E}[\,W_n W_m\,]$ を（確率変数や期待値の記号を含まない形で）求めよ．答案は用紙のおもて面に答だけを書け．

問２．　ガウス積分に関連する以下の小問に答えよ．

i) $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx$ を計算するために，重積分 $I^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+{}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$ を $x = u,\ y = uv$ によって積分変数変換した後に，u についての積分を先に行う逐次積分として積分変数変換 $\dfrac{1}{2}u^2 = z$ を行うと，z についての積分が計算できる．以上の手順に従って計算すると，

$$I^2 = \int_{[0,\infty)^2} \boxed{\text{(a)}\qquad\qquad} \,du\,dv = \int_0^\infty \boxed{\text{(b)}\qquad} \,dv$$

となる．最右辺の積分は，たとえば積分変数変換 $v=\tan\theta$ によって具体的に計算できる．以上の説明に合うように空欄 (a) と (b) を埋める（積分記号を含まない）数式を答よ．答案は用紙のおもて面に (a) ...， (b) ... のように答だけを書け．

ii) $a>0$ とする．上の小問で計算したガウス積分 I において，$\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad\qquad\qquad}$ を行ってから上の小問の I の計算結果を用いると，公式 $\displaystyle\int_0^{\infty}\boxed{\text{(d)}\qquad\quad}\,dy=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$ を得る．上の小問の記述にならって，行うべき計算手順の説明と対応する数式で空欄 (c) を埋め，空欄 (d) を適切な数式で埋めて得られる公式を完成せよ．答案は用紙のおもて面に上の小問と同様に答だけを書け．

iii) 上の小問で得た公式の両辺を $\boxed{\ }$ で $\boxed{\ }$ 回 $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ した後に $\boxed{\qquad}$ とおくと（若干の式の整理の後に），定積分の値 $\displaystyle\int_0^{\infty}x^8\,e^{-x^2/2}\,dx=105\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ を得る．この公式の導出方法は正規分布のモーメントを計算するのに用いられる．空欄を適切に埋めて以上の説明を完成せよ．答案は用紙のおもて面に空欄を埋めた状態で下線部全体を書け．

問３． 独立確率変数の和に関連する以下の小問に答えよ．

i) X と Y がそれぞれポワッソン分布に従う独立な確率変数たちで，期待値がそれぞれ $\mathrm{E}[\,X\,]=4$ と $\mathrm{E}[\,Y\,]=9$ を満たすとき，和 $X+Y$ は非負整数 k に対して

$$\mathrm{P}[\,X+Y=k\,]=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}[\,X=i,\ Y=k-i\,]=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}[\,X=i\,]\times\mathrm{P}[\,Y=k-i\,]$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{4^i}{i!}\,e^{-4}\times\frac{9^{k-i}}{(k-i)!}\,e^{-9}=\frac{1}{k!}\,e^{-13}(4+9)^k=\frac{13^k}{k!}\,e^{-13}$$

となって，期待値 13 のポワッソン分布に従うことがわかる．以上の導出の数式の変形において，2 項定理，確率の加法性，確率変数列の独立性，ポワッソン分布の定義，を用いた順番に並べ直せ．答案は用紙のおもて面に 1. ...， 2. ...， ... のように答だけを書け．

ii) n を自然数とし，$Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ を独立同分布実確率変数列で，各々の確率変数は平均 3 のポワッソン分布に従う確率変数 Z と同分布とする．これらの確率変数の和で定義される確率変数を $W_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Z_k$ とおくとき，上の小問の議論を帰納的に用いることで，j を非負整数とするとき $\mathrm{P}[\,W_n=j\,]=\boxed{\qquad\qquad}$ となる．空欄に当てはまる，上の小問の計算の最右辺に対応する，計算結果を答案の用紙のおもて面に書け．

iii) 上の小問の $W_1,W_2,\ldots$ と $n>m$ を満たす非負整数 n と m について，共分散 $\mathrm{Cov}(W_nW_m)=\mathrm{E}[\,(W_n-\mathrm{E}[\,W_n\,])(W_m-\mathrm{E}[\,W_m\,])\,]$ を計算せよ（W_n や Z_n たちを含まない表示を求めよ）．答案は3 **行以内の式変形の主要部分と答**を用紙のおもて面に書け．

問４．

確率論入門 2　期末試験　**略解**　　2019/01/23 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $\underline{\mathrm{P}[\,W_3=1,\ W_4=2\,]}=\mathrm{P}[\,W_3=1,\ W_4-W_3=1\,]$
$=\mathrm{P}[\,Z_1+Z_2+Z_3=1\,]\,\mathrm{P}[\,Z_4=1\,]=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}=\underline{\dfrac{3}{16}}$　【すごろくの場合の数を数える方法でももちろん計算可能.】

ii) $\underline{(\forall\varepsilon>0)\ \lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}[\,\frac{1}{n}|W_n|\geqq\varepsilon\,]=0}$

iii) 期待値の線形性と単調性を用いることで,
$\mathrm{E}[\,W_n^2\,]=\mathrm{E}[\,W_n^2\,\mathbf{1}_{\{|W_n|\geqq n\varepsilon\}}\,]+\mathrm{E}[\,W_n^2\,\mathbf{1}_{\{|W_n|<n\varepsilon\}}\,]\geqq\mathrm{E}[\,W_n^2\,\mathbf{1}_{\{|W_n|\geqq n\varepsilon\}}\,]$
$\geqq(n\varepsilon)^2\mathrm{E}[\,\mathbf{1}_{\{|W_n|\geqq n\varepsilon\}}\,]=(n\varepsilon)^2\mathrm{P}[\,\frac{1}{n}|W_n|\geqq\varepsilon\,]$

iv) $\underline{\mathrm{E}[\,W_nW_m\,]=\min\{m,n\}=m\wedge n}$　（$\underline{m}$ と n の大きくないほう）
【$n\geqq m$ のとき $\mathrm{E}[\,W_nW_m\,]=\mathrm{E}[\,W_n-W_m\,]\mathrm{E}[\,W_m\,]+\mathrm{V}[\,W_m\,]+\mathrm{E}[\,W_m\,]^2=m\mathrm{V}[\,Z_1\,]=m$】

問 2 (30=10*3).

i) $\underline{(\mathrm{a})\ e^{-u^2(1+v^2)/2}\,u}$, $\underline{(\mathrm{b})\ \dfrac{1}{1+v^2}}$　【$I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$】

ii) (c) 積分変数変換 $x=\sqrt{a}\,y$, (d) $e^{-a\,y^2/2}$　【$\sqrt{a}\displaystyle\int_0^\infty e^{-a\,y^2/2}\,dy=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$】

iii) a で 4 回微分して y についての定積分と a についての微分の順序を交換した後に $a=1$ とおく

問 3 (30=10*3).

i) 1. 確率の加法性, 2. 確率変数列の独立性, 3. ポワッソン分布の定義, 4. 2 項定理.

ii) $\underline{\mathrm{P}[\,W_n=j\,]=\dfrac{(3n)^j}{j!}e^{-3n}}$　【上の議論と帰納法から W_n の分布は平均 $3n$ のポワッソン分布】

iii) $\mathrm{Cov}(W_n,W_m)$
$=\mathrm{E}[\,(W_m-\mathrm{E}[\,W_m\,])^2\,]+\mathrm{E}[\,W_n-\mathrm{E}[\,W_n\,]-(W_m-\mathrm{E}[\,W_m\,])\,]\mathrm{E}[\,W_m-\mathrm{E}[\,W_m\,]\,]$
$=\mathrm{V}[\,W_m\,]=3m.$ よって, $\mathrm{Cov}(W_n,W_m)=3m.$
【Z_k たちが独立なので $W_m=\displaystyle\sum_{k=1}^m Z_k$ と $W_n-W_m=\displaystyle\sum_{k=m+1}^n Z_k$ は独立. また, 前小問から（ポワッソン分布は分散と平均が等しいことも思い出すと）$\mathrm{E}[\,W_m\,]=\mathrm{V}[\,W_m\,]=3m,$】

問 4 (-10).　無記, 誤記