慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	50分
令和01年07月24日(水) 6時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	確率論入門1	氏　名	

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（3または4）**を必ず明記すること．

問1．　3つの整数10, 100, 1000を要素とする全体集合$\Omega = \{10, 100, 1000\}$の部分集合全てを集めた集合族$\mathcal{F}$ $(=2^{\Omega})$を定義域とする確率測度$\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$について以下の問に答えよ．

i) 集合$A \in \mathcal{F}$のうち，Pが確率測度ということだけで関数値$\mathrm{P}[\,A\,]$が決まるものとその値の組を答案用紙のおもて面に答だけを$\underline{\mathrm{P}[\,A\,]=1.1,\ \mathrm{P}[\,B\,]=-0.5,\ \ldots}$のように式の形ですべて列挙せよ．（実際の答案用紙には$A, B, \ldots$は該当する集合をあらわに正しく書くこと．）

ii) aは$0<a<1$を満たすある実数とする．$\mathrm{P}[\,\{10, 1000\}\,]=a$が成り立つとき，上の小問以外の集合に対してもPの値が決ま（ってaで書け）るが，値が決まらない集合もある．新たにPの値が決まる集合とその値を（上の小問で解答したものと本小問冒頭のものを除いて）答案用紙のおもて面に答だけを$\underline{\mathrm{P}[\,C\,]=1.1-a,\ \ldots}$のようにすべて列挙せよ．

iii) 上の小問2つでPの値が決まらなかった集合の値がすべて決まるために最小限あといくつの集合についてPの値が決まれば良いか．そのときの残りの集合のPの値とともに答えよ．答案用紙には，たとえば最小限あと2つの集合D, Eの値が必要ならばそれらの値をb, cとして，$\underline{b=\mathrm{P}[\,D\,],\ c=\mathrm{P}[\,E\,],\ \mathrm{P}[\,F\,]=a+b+c,\ \ldots}$のように，おもて面に答だけを列挙せよ．

iv) 上の小問において，Pが確率測度であるために解答に用いた$b, c, \ldots$が満たすべき条件を，不等式の個数が導入した文字定数の個数の2倍以内になる形で，書け．答案用紙はおもて面に$\underline{0.5<b \leqq 1.5,\ 0.5-b \leqq c < 1.3}$のように答だけを書け．

問2．　確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$において，関数$X:\ \Omega \to \mathrm{P}$のことを（正確には，可測な関数のことを）確率変数と呼ぶのであった．$C \in \mathcal{F}$に対して確率変数$\mathbf{1}_C$を集合Cの定義関数$\mathbf{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in C, \\ 0, & \omega \notin C, \end{cases}$とする．（言い換えると，$\mathbf{1}_C$は事象$C$が起きるとき1，起きないとき0となる確率変数である．）以下の問に答えよ．

i) 2つの事象$A \in \mathcal{F}$と$B \in \mathcal{F}$に対して$\mathrm{P}[\,A \cup B\,]$を$\mathrm{P}[\,A\,], \mathrm{P}[\,B\,], \mathrm{P}[\,A \cap B\,]$の線形結合で表す式を，公式$\mathrm{P}[\,C\,]=\mathrm{E}[\,\mathbf{1}_C\,]$と期待値の線形性を用いて証明するために使えるような公式であって，関数（確率変数）$\mathbf{1}_{A\cup B}$を$\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, および定数1（恒等的に1である確率変数）の線形結合で表す公式，を求めよ．答案用紙はおもて面に**公式だけでなく証明の骨子がわかる**3**行程度の簡潔な変形を間に挟んだ形で**$\underline{\mathbf{1}_{A\cup B}=\cdots=\cdots}$のように書け．

ii) $\mathrm{P}[\,A \cup (B^c \cap C)\,]$を$A, B, C$とその共通部分たちの確率$\mathrm{P}[\,A\,], \ldots, \mathrm{P}[\,A \cap B\,], \ldots, \mathrm{P}[\,A \cap B \cap C\,]$の線形結合を用いて（つまり，和集合や補集合の記号を用いずに）表せ．答案用紙はおもて面に答だけを$\underline{\mathrm{P}[\,A \cup (B^c \cap C)\,]=\cdots}$のように書け．

iii) 小問ii)の答を得るのに用いることのできる，小問i)の答に対応する集合の定義関数間の線形関係の公式を求めよ．小問i)と同様に答案用紙のおもて面に3**行程度の簡潔な変形を含めて**$\underline{\mathbf{1}_{A\cup(B^c\cap C)}=\cdots}$のように書け．

問3．　実数値関数のマクローリン展開は，非負整数$\mathbb{Z}_+$を全体集合$(\Omega=\mathbb{Z}_+)$とする，展開

に対応する確率測度（分布）の平均値や確率の値の計算を始め様々な性質・公式を得る上で役立つ．ポワッソン分布，幾何分布，負の2項分布などが具体例として知られている．以下の空欄 (a)–(d) を適切な数式で埋めよ．埋めるべき数式だけを (a) ..., (b) ..., (c) ..., (d) ... のように答案用紙のおもて面に書け．

i) ポワッソン分布に直接関係があるのは指数関数のマクローリン展開 $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ である．この等式を証明するために，右辺の級数の部分和の数列 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, を考えると，$e^x - S_n$ で定義される数列が 0 に収束すればよい．簡単のため以下 $x > 0$ とすると S_n は増加数列なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 n_0 を選んで，$n \geqq n_0$ ならば $0 \leqq e^x - S_n \leqq \varepsilon$ が成り立つことを言えばよい．e^x の（剰余項が x の $n+1$ 次であるような）テイラーの定理を用いると，$e^x - S_n =$ $\boxed{\text{(a)}\qquad}$ と $0 < \theta < 1$ を満たす θ が存在することが保証される．（この式によって $e^x - S_n \geqq 0$ はわかる．）θ は n に応じて変わるが，n_1 を $x-1$ を超える最小の整数，n_0 を $n_0 \geqq n_1 - 1 +$ $\boxed{\text{(b)}\qquad}$ を満たす最小の整数に選ぶと，これらは x と ε だけで定まって，選び方から $0 < \dfrac{x}{n_1+1} < 1$ なので，（特に $n_0 \geqq n_1$ が成り立ついっぽう，）さらに $n \geqq n_0$ ならば $n+1 \geqq n_0+1 \geqq n_1+1 > x$ なので $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \dfrac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \leqq \left(\dfrac{x}{n_1+1}\right)^{n_0-n_1+1} \dfrac{x^{n_1}}{n_1!}$ だから，n_0 の選び方から $0 \leqq e^x - S_n \leqq \varepsilon$ となって，冒頭のマクローリン展開が証明できる．

ii) $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，非負整数値を取る確率変数 X の分布が $\mathrm{P}[\, X = k \,] = (1-a)\, a^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, で与えられているとする．X のモーメント，たとえば $\mathrm{E}[\, X^2 \,] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathrm{P}[\, X = k \,]$ を求める際には $\mathrm{E}[\, (X+2)(X+1) \,]$ の計算を経由すると初等的に求まる．実際，m を自然数として $y_m = \mathrm{E}[\, (X+m)(X+m-1)\cdots(X+1) \,]$ とおくと，
$y_m = (1-a) \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1)\cdots(k+1) a^k$ だから $a\, y_m$ の右辺の和の変数を $k = \ell - 1$ で ℓ に変換した後，$\ell = 0$ の項が 0 なので加算して，最後に $\ell = k$ で k に戻すことで
$a\, y_m = (1-a) \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+m-1)(k+m-2)\cdots k a^k$ と変形できて，元の式から辺々引き算してから両辺を $1-a$ で割ることで y_m, $m = 1, 2, \ldots$, の漸化式 $y_m =$ $\boxed{\text{(c)}\qquad}$ を得るから，m について帰納的に y_m が求まる．これを用いて y_2 までを求めることで $\mathrm{E}[\, X^2 \,] =$ $\boxed{\text{(d)}\qquad}$ を得る．

問4．

確率論入門 1　期末試験　**略解**　　2019/07/24 服部哲弥

問 1 (30=10+5+10+5).　　【スライド第 2 回，レポート 1】

i) $\underline{\mathrm{P}[\,\emptyset\,] = 0}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{10, 100, 1000\}\,] = 1}$
【$\mathrm{P}[\,\{\}\,] = 0$, $\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$ も可だが，$\mathrm{P}[\,\{\emptyset\}\,]$, $\mathrm{P}[\,0\,]$, $\mathrm{P}[\,\{\Omega\}\,]$ 等は不可（$\emptyset$ と Ω は中括弧まで含めた記号になっている）．また，以下で中括弧のないものは不可】

ii) $\underline{\mathrm{P}[\,\{100\}\,] = 1 - a}$,

iii) $\underline{b = \mathrm{P}[\,\{10\}\,]}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{1000\}\,] = a - b}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{10, 100\}\,] = 1 - a + b}$, $\underline{\mathrm{P}[\,\{100, 1000\}\,] = 1 - b}$
【別解あり】

iv) $\underline{0 \leqq b \leqq a}$
【すべての $A \subset \Omega$ に対して $\mathrm{P}[\,A\,] \geqq 0$ となる条件を整理したもの，ii) に応じて別解あり】

問 2 (30=10*3).　　【教科書「統計と確率の基礎」2 章 §3, 3 章 §2，スライド第 5 回，レポート 2】

i) $\underline{\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_{(A^c\cap B^c)^c} = 1 - \mathbf{1}_{A^c\cap B^c} = 1 - \mathbf{1}_{A^c}\ \mathbf{1}_{B^c} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)\,(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}}$

ii) $\underline{\mathrm{P}[\,A \cup (B^c \cap C)\,] = \mathrm{P}[\,A\,] + \mathrm{P}[\,C\,] - \mathrm{P}[\,B \cap C\,] - \mathrm{P}[\,A \cap C\,] + \mathrm{P}[\,A \cap B \cap C\,]}$

iii) $\underline{\mathbf{1}_{A\cup(B^c\cap C)} = \mathbf{1}_{(A^c\cap(B^c\cap C)^c)^c} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)\,(1 - \mathbf{1}_{B^c\cap C}) = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)\,(1 - (1 - \mathbf{1}_B)\ \mathbf{1}_C)}$
$\underline{= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{B\cap C} + \mathbf{1}_{A\cap B\cap C}}$

問 3 (40=10*4).　　【教科書「統計と確率の基礎」2 章章末問題 問 4，レポート 3】

(a) $\underline{e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$　　(b) $\underline{\dfrac{\log(\varepsilon e^{-x}\dfrac{n_1!}{x^{n_1}})}{\log(\dfrac{x}{n_1+1})}}$

【$x > 0$ と $0 < \theta < 1$ と問題文の変形から
$e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^{x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \left(\dfrac{x}{n_1+1}\right)^{n_0-n_1+1} \dfrac{x^{n_1}}{n_1!}e^{x} \leqq \varepsilon$】

(c) $\underline{\dfrac{m}{1-a}\,y_{m-1}}$　　(d) $\underline{\dfrac{a^2+a}{(1-a)^2}}$　　【$y_m = \mathrm{E}[\,(X+m)(X+m-1)\cdots(X+1)\,] = \dfrac{m!}{(1-a)^m}$】

問 4 (-10).