慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	**50** 分	
令和 02 年 01 月 29 日 (水) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	確率論入門 2	氏　名			

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　以下は，レポート１から抜粋して少し書き換えた文章である．

2 進数列（0 と 1 の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ を考える．0 を裏，1 を表と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．

無限列の全体集合 Ω の部分集合のうちで有限項だけで決まるもの $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ．集合 A を決めるのに十分な回数を n として n 回硬貨投げを考える．1 回ごとの表の確率を $\dfrac{1}{2}$ とすると，A の確率を計算できる．このとき，無限列集合 Ω 上の確率測度 P であって，どの A でも有限硬貨投げによる計算結果が $\mathrm{P}[\,A\,]$ に等しくなるものがあることが知られている．この確率空間の上の確率変数列 $\{Z_k\}$ を，$k = 1, 2, \ldots$ と $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $Z_k(s) = 2s_k - 1$ で定義し，確率変数列 $\{W_n\}$ を，$W_0 = 0$ および $n = 1, 2, \ldots$ に対して $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$ で定義して，原点 0 を出発点とするランダムウォークと呼ぶ．

以上の文章の記号と設定の下で，自然数 n と自然数の列 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ に対して
$A(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_{k_j} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ と置くとき，以下の小問に答えよ．

i) B^c を集合 B の補集合とする．$(A(1,4)^c \cap A(2,3) \cap A(1)^c) \cup (A(1,2) \cap A(3)^c) \cup (A(1,3) \cap A(2)^c)$ で与えられる集合（事象）をランダムウォーク W_n を用いてできるだけ単純な形で表すと $\underline{\{s \in \Omega \mid W_{\square}(s) = \square\}}$ と書ける．空欄を適切に埋めた上で下線部を答案用紙のおもて面に書け．

ii) $\underline{最初の\square回の硬貨投げの結果が\boxed{}である確率}$ を上記 $A(k_1, \ldots, k_n)$ たちを用いて計算したときの途中からの変形が次のようになった：$\cdots = \mathrm{P}[\,A(1,3,5)\,] - \mathrm{P}[\,A(1,2,3,5)\,] - (\mathrm{P}[\,A(1,3,4,5)\,] - \mathrm{P}[\,A(1,2,3,4,5)\,]) = \mathrm{P}[\,A(1,3,5)\,] - \mathrm{P}[\,A(1,2,3,5)\,] - \mathrm{P}[\,A(1,3,4,5)\,] + \mathrm{P}[\,A(1,2,3,4,5)\,] = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{32}$．以上が意味をなすように空欄を適切に埋めた上で下線部を答案用紙のおもて面に書け．

iii) 整数 a に対して，初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n = a$ となる最小の n を T_a とおく．集合 $\{s \in \Omega \mid T_2(s) < T_{-1}(s)$，かつ $3 \leqq T_2(s) \leqq 5\}$ を小問 i) のように $W_1(s), W_2(s), \ldots$ だけを用いて記述された集合で表せ．答案用紙はおもて面に i) の答の書き方にならって答だけを書け．

iv) 実確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して成り立つ不等式 $\mathrm{P}[\,|X| \geqq 1\,] \leqq \mathrm{E}[\,X^2\,]$ の証明を答案用紙のおもて面に 5 行程度で書け．集合（事象）の定義関数 $\mathbf{1}_\cdot$ の記号と性質は断りなく用いてよい．

問２．　ガウス積分に関連する以下の小問に答えよ．$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ は実 1 変数非負値関数で以下の積分が存在するものとする．

i) $x = u$ と $y = uv$ で定まる $(u, v) \mapsto (x, y)$ に基づく重積分変数変換によって得られる等式 $\underline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \boxed{}\, du\, dv}$ の空欄を f, u, v を用いて埋めた上で，下

線部を答案用紙のおもて面に書け.

ii) $x = r\cos\theta$ と $y = r\sin\theta$ で定まる $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ に基づく重積分変数変換を行った後に θ についての定積分を実行して得られる等式 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^\infty \boxed{}\,dr$ の空欄を小問 i) と同様に適切に埋めた上で，下線部を答案用紙のおもて面に書け.

iii) 比 $\dfrac{\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-x^2/2}\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx}$ を，ガウス積分を用いずに計算せよ．答案用紙は答だけでなく 3 行程度の変形も示せ.（適切な変形のない答と変形の途中に π が現れる答は採点しない.）

問 3 ． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の独立な実数値確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ と $Y:\ \Omega \to \mathbb{R}$ の和 $X+Y:\ \Omega \to \mathbb{R}$ を考える．X と Y が 2 個以下の母数（実パラメーター）を持つ，$\mathbb{R}$ 上の（通常の，狭義のルベーグ）積分で定義されるある同じ分布の族のそれぞれどれかに従う（つまりそれぞれの確率変数の値の分布 $\mathrm{P}\circ X^{-1}$ と $\mathrm{P}\circ Y^{-1}$ がどちらもその分布の族に属する分布である）独立確率変数たちのときに $X+Y$ も必ずその族の分布であるとする．このとき，

i) そのような分布の族の例を 1 つあげよ．答案用紙には名称と密度関数の一般形を書け.

ii) X と Y が i) で答にあげた例の分布の族の中の分布にそれぞれ従う独立確率変数たちのとき，$X+Y$ に対応するパラメータを X と Y それぞれに対応するパラメータの値を用いて与える公式を答案用紙に書け.

iii) X_n , $n = 1, 2, \ldots$, が独立確率変数列のときに，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ に対応するパラメータを X_1 に対応するパラメータの値と n を用いて与える公式を答案用紙に書け.

確率論入門 2　期末試験　**略解**　　2020/01/29 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $\underline{\{s \in \Omega \mid W_3(s) = 1\}}$　【$A(1,4) \subset A(1)$ だから $(A(1,4)^c \cap A(2,3) \cap A(1)^c) \cup (A(1,2) \cap A(3)^c) \cup (A(1,3) \cap A(2)^c) = (A(2,3) \cap A(1)^c) \cup (A(1,2) \cap A(3)^c) \cup (A(1,3) \cap A(2)^c)$ は最初の 3 回の 2 回が表で 1 回が裏である無限硬貨投げの列をすべて集めた集合に一致】

ii) <u>最初の 5 回の硬貨投げの結果が表裏表裏表である確率</u>
【$\mathrm{P}[\ \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (1,0,1,0,1)\}\ ]$
$= \mathrm{P}[\ (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_3, s_5) = (1,1,1)\}\ ]$
$\quad - \mathrm{P}[\ (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_2, s_3, s_5) = (1,1,1,1)\}\ ]$
$\quad - (\mathrm{P}[\ (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_3, s_4, s_5) = (1,1,1,1)\}\ ]$
$\quad - \mathrm{P}[\ (s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (1,1,1,1,1)\}\ ])$
$= a(1,3,5) - a(1,2,3,5) - (a(1,3,4,5) - a(1,2,3,4,5))$
$= a(1,3,5) - a(1,2,3,5) - a(1,3,4,5) + a(1,2,3,4,5)$】

iii) $\underline{\{s \in \Omega \mid W_1(s) = W_3(s) = 1,\ W_2(s) = 0,\ W_4(s) = 2\}}$
【原点から出発したランダムウォークが 2 に着くのは偶数歩目なので T_2 は正の偶数だから，$3 \leqq T_2(s) \leqq 5 \Leftrightarrow T_2(s) = 4$．途中の経路も 1 通りに決まって要素が 1 つだけの（1 点）集合】

iv) $\mathbf{1}_{|X| \geqq 1} + \mathbf{1}_{|X|<1}$ は恒等的に 1 なので期待値の線形性から
$\mathrm{E}[\ X^2\ ] = \mathrm{E}[\ X^2\, \mathbf{1}_{|X| \geqq 1}\ ] + \mathrm{E}[\ X^2\, \mathbf{1}_{|X|<1}\ ]$.
期待値の非負値性と $X^2 \geqq 0$ から $\mathrm{E}[\ X^2\, \mathbf{1}_{|X|<1}\ ] \geqq 0$.
期待値の単調性と集合の定義関数の期待値が集合の確率に等しいことからから
$\mathrm{E}[\ X^2\, \mathbf{1}_{|X| \geqq 1}\ ] \geqq \mathrm{E}[\ \mathbf{1}_{|X| \geqq 1}\ ] = \mathrm{P}[\ |X| \geqq 1\ ]$．以上から $\mathrm{E}[\ X^2\ ] \geqq \mathrm{P}[\ |X| \geqq 1\ ]$.

問 2 (30=10*3).

i) $\underline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(u^2(1+v^2))\, u\, du\, dv}$

ii) $\underline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^\infty 2\pi f(r^2)\, r\, dr}$
【$F' = f$ のとき $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\, dx\, dy = \pi\,(F(+\infty) - F(0))$．ガウス積分は $F(t) = -2e^{-t/2}$.】

iii) $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-x^2/2}\, dx = -\int_0^\infty x^5 (e^{-x^2/2})'\, dx = -\Big[x^5 e^{-x^2/2}\Big]_0^\infty + 5\int_0^\infty x^4 e^{-x^2/2}\, dx$
$\displaystyle = -5\int_0^\infty x^3 (e^{-x^2/2})'\, dx = -5\Big[x^3 e^{-x^2/2}\Big]_0^\infty + 15\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\, dx = 15\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\, dx$．よって求める比は 15.
【パラメータについての微分を用いる別解も可】

問 3 (30=10*3).　解答例（正規分布の場合）.

i) 正規分布．パラメータは平均 $m \in \mathbb{R}$ と分散 $v > 0$．密度関数は $\rho_{m,v}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/(2v)}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) X と Y が従う正規分布のパラメータをそれぞれ (m_X, v_X) と (m_Y, v_Y) と置くとき，$X+Y$ はパラメータ $(m_X + m_Y, v_X + v_Y)$ の正規分布に従う.

iii) X_1 が従う正規分布のパラメータを (m, v) と置くとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ はパラメータ $(n\, m, n\, v)$ の正規分布に従う.

【積分で定義される分布と指定されているので，ポワッソン分布や 2 項分布等は加点無し】

問 4 (-10).　無記，誤記