慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

									試験時間	50 分		
令和 03 年 07 月 13 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組										
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号										
科目名	確率論入門 I	氏　名										

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（４または５）**を必ず明記すること．

問１．　全体集合をレポート 1 の Ω すなわち $\Omega = \{1,2,3,4\}$ とし，定義域 $\mathcal{F}$ を部分集合を全て集めた集合族 2^{Ω} とする 2 つの集合関数 Q_1 と Q_2 について，以下の小問に答えよ．

i) 集合関数 Q_1 は非負値性を満たし，かつ全測度 1 すなわち $\mathrm{Q}_1[\,\Omega\,] = 1$ と空集合に対して 0 すなわち $\mathrm{Q}_1[\,\emptyset\,] = 0$ を満たすとする．この Q_1 を定めるにはあと何個の集合に対して Q_1 の値を定める必要があるかを答え，実際に条件を満たす具体的な実数値をいずれも答案用紙のおもて面に答だけを書け．複数の解答が可能な場合は具体例を 1 組あげれば良いが，最初の答の個数の集合すべてに対してそれぞれ 1 つの実数値を答えなければいけない.（この小問の段階では Q_1 が測度であるとか加法性を満たすとか指定されてないことに注意.）

ii) $\mathcal{F}$ を定義域とする 2 つの確率測度で，P_1 は $\mathrm{P}_1[\,\{1\}\,] = \mathrm{P}_1[\,\{2\}\,] = \mathrm{P}_1[\,\{3\}\,] = \dfrac{1}{4}$ で定まる確率測度とし，P_2 は $\mathrm{P}_2[\,\{1\}\,] = \dfrac{1}{4}$，$\mathrm{P}_2[\,\{2\}\,] = \dfrac{1}{3}$，$\mathrm{P}_2[\,\{3\}\,] = \dfrac{1}{6}$ で定まる確率測度とする．このとき各集合 $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{Q}_2[\,A\,] = 5\mathrm{P}_1[\,A\,] - 4\mathrm{P}_2[\,A\,]$ と置くことで得られる集合関数 Q_2 は，(a) 加法性と (b) 全測度 1 を満たすが (c) 非負値性は満たさないことを証明せよ．確率測度 P_1 と P_2 が非負値性，加法性，全測度 1 を満たすことは断り無く用いて良い．答は答案用紙のおもて面に (a)(b)(c) 合計で答案用紙 5 行程度までの式変形を用いて簡潔に書け.

問２．　確率変数の独立や相関に関連する以下の小問に答えよ.

i) 確率変数 X と Y が有限種類の実数値しかとらないとし，取り得る異なる値の組をそれぞれ a_i, $i = 1,2,\ldots,m,$ および b_j, $j = 1,2,\ldots,n,$ と置くとき，X と Y が独立ならば，実数上の実数値関数 f と g との合成関数として得られる確率変数 $f(X) = f \circ X$ と $g(Y) = g \circ Y$ も独立であることを f も g も単射の場合に示せ．答案用紙は以下の証明の 2 つの空欄に入る式を等号で結んで答案用紙のおもて面に書け.
『X と Y の取り得る値の置き方から，$f(X)$ の取り得る値は $f(a_i)$, $i = 1,\ldots,m$，$g(Y)$ の取り得る値は $g(b_j)$, $j = 1,\ldots,n$ で，有限種類の実数値しかとらないから，各 (i,j) に対して $\mathrm{P}[\,f(X) = f(a_i),\ g(Y) = g(b_j)\,] = \mathrm{P}[\,f(X) = f(a_i)\,]\mathrm{P}[\,g(Y) = g(b_j)\,]$ を証明すれば良いが，f と g が単射なので $f(a_i)$ たちは値が異なり $g(b_j)$ たちもそうなので左辺を変形して X と Y の独立性の同様の条件式を代入すると，

$$\mathrm{P}[\,f(X) = f(a_i),\ g(Y) = g(b_j)\,] = \boxed{}$$
$$= \boxed{} = \mathrm{P}[\,f(X) = f(a_i)\,]\mathrm{P}[\,g(Y) = g(b_j)\,]$$

となって証明すべき式を得る.』

ii) 集合 $A \in \mathcal{F}$ に対して確率変数 $\mathbf{1}_A$ を A の定義関数 $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$ とする.（言い換えると，$\mathbf{1}_A$ は事象 A が起きるとき 1，起きないとき 0 となる確率変数である．2 つの集合

$A, B \in \mathcal{F}$ に対して共分散 $\mathrm{Cov}(\ \mathbf{1}_A\ ,\ \mathbf{1}_B\ )$ を計算して集合の確率測度 $\mathrm{P}[\ A\ ]$ などで表すための以下の導出の空欄 3 箇所を，最初の 2 つは集合の確率測度の式で，最後の空欄は答案用紙 1〜2 行の分量の簡潔な式変形と答で，それぞれ埋めよ．答案用紙はおもて面に空欄部分を答えよ.『$\mathrm{E}[\ \mathbf{1}_A\ ] = \boxed{}$ および $\mathrm{E}[\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B\ ] = \boxed{}$ だから，
$\mathrm{Cov}(\ \mathbf{1}_A\ ,\ \mathbf{1}_B\ ) = \boxed{}$.』

iii) 確率変数 X に対して $F_X(x) = \mathrm{P}[\ X \leqq x\ ]$ で定義される実数上の関数 F_X を X の分布関数と言う．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の集合 $A \in \mathcal{F}$ が与えられたとき，X が A の定義関数 $X = \mathbf{1}_A$ の場合に，$\displaystyle\int_0^\infty (1 - F_{\mathbf{1}_A}(x))\, dx$ を計算して積分と期待値を用いない形で答えよ．答案用紙は結果だけでなく，答案用紙のおもて面に 3 行程度以内の分量の式変形も書くこと.（答のみの場合は採点しない.）

問 3 ． 非負整数に値を取る確率変数に関連する以下の級数 i) ii) iii) を計算せよ．対数は自然対数とする．いずれも，答だけでなく導出も答案用紙のおもて面に 2〜3 行程度の分量で示すこと．

参考：
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} {}_{a+k-1}\mathrm{C}_k\, (1-p)^k = p^{-a}$$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k-3)^2 \frac{1}{2} (\frac{2}{3})^k$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{4^k \times 2}$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{27} \frac{3^k}{k!} (\log 3)^k$

確率論入門 I　期末試験　**略解**　2021/07/14 服部哲弥

問 1 (40=5*2+10*3).　【レポート 1】

i) 14 個.
$\mathrm{Q}_1[\,A\,]=1,\ A\in\mathcal{F}\cap\{\emptyset,\Omega\}^c$ あるいは
$\mathrm{Q}_1[\,\{1\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{2\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{3\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{4\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{1,2\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{1,3\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{1,4\}\,]$
$=\mathrm{Q}_1[\,\{2,3\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{2,4\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{3,4\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{1,2,3\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{1,2,4\}\,]$
$=\mathrm{Q}_1[\,\{1,3,4\}\,]=\mathrm{Q}_1[\,\{2,3,4\}\,]=1$ など.
【$2^4-2=14$, 後半は別解多数，負でない実数値ならば集合によって異なっていても良く，解答の 1 という数値例は特別な意味は無い．ただし，$\emptyset$ と $\{1,2,3,4\}$ は含まれてはならず，他の 14 個はもれなく指定してないと不可.】

ii) (a) $A\cap B=\emptyset$ とすると確率測度の加法性から $\mathrm{Q}_2[\,A\cup B\,]=5\mathrm{P}_1[\,A\cup B\,]-4\mathrm{P}_2[\,A\cup B\,]=5(\mathrm{P}_1[\,A\,]+\mathrm{P}_1[\,B\,])-4(\mathrm{P}_2[\,A\,]+\mathrm{P}_2[\,B\,])=(5\mathrm{P}_1[\,A\,]-4\mathrm{P}_2[\,A\,])+(5\mathrm{P}_1[\,B\,])-4\mathrm{P}_2[\,B\,])=\mathrm{Q}_2[\,A\,]+\mathrm{Q}_2[\,B\,]$ となって Q_2 の加法性が成り立つ.
(b) $\mathrm{Q}_2[\,\Omega\,]=5\mathrm{P}_1[\,\Omega\,]-4\mathrm{P}_2[\,\Omega\,]=5-4=1$ によって全測度 1 である.
(c) $\mathrm{Q}_2[\,\{2\}\,]=5\mathrm{P}_1[\,\{2\}\,]-4\mathrm{P}_2[\,\{2\}\,]=5\times\dfrac14-4\times\dfrac13=-\dfrac1{12}<0$ となって負になる.

問 2 (30=10*3).　【教科書「統計と確率の基礎」3 章 §2 と章末問題 2，レポート 2，第 5 回】

i) $\mathrm{P}[\,X=a_i,\ Y=b_j\,]=\mathrm{P}[\,X=a_i\,]\mathrm{P}[\,Y=b_j\,]$
ii) $\mathrm{E}[\,\mathbf{1}_A\,]=\mathrm{P}[\,A\,]$ および $\mathrm{E}[\,\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\,]=\mathrm{P}[\,A\cap B\,]$ だから,
$\mathrm{Cov}(\,\mathbf{1}_A\,,\mathbf{1}_B\,)=\mathrm{E}[\,(\mathbf{1}_A-\mathrm{P}[\,A\,])(\mathbf{1}_B-\mathrm{P}[\,B\,])\,]=\mathrm{P}[\,A\cap B\,]-\mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B\,]$
iii) $\mathbf{1}_A$ は 0 か 1 の値しか取らないことに注意すると，$0\leqq x<1$ のとき $F_{\mathbf{1}_A}(x)=\mathrm{P}[\,\mathbf{1}_A\leqq x\,]=\mathrm{P}[\,A^c\,]=1-\mathrm{P}[\,A\,]$, $x\geqq 1$ のとき $F_{\mathbf{1}_A}(x)=1$ だから
$$\int_0^\infty(1-F_{\mathbf{1}_A}(x))\,dx=\int_0^1\mathrm{P}[\,A\,]\,dx=\mathrm{P}[\,A\,].$$

問 3 (30=10*3).　i) 教科書 2 章章末練習問題 2 問 4(i) とその巻末解答の $\mathrm{V}[\,X\,]$ で $p=\dfrac13$ と置くと,
$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty(k-3)^2\frac12\Big(\frac23\Big)^k=\frac{1-\frac13}{(\frac13)^2}=6$.【別解．等比級数の和によって $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty q^kp=\frac{pq}{1-q}$. q で微分して $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty kq^{k-1}p=\frac{p}{(1-q)^2}$. これから $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty k(1-p)^{k-1}p=\frac1p$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty kq^kp=\frac{pq}{(1-q)^2}$. 後者を q で微分して $q=1-p$ と置くと，$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty k^2(1-p)^{k-1}p=\frac2{p^2}-\frac1p$. よって $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\Big(k-\frac1p\Big)^2(1-p)^{k-1}p=\frac1{p^2}-\frac1p$. $p=\dfrac13$ と置くと 6 を得る.】

ii) 教科書 1 章章末練習問題 1 補足 1 (1.20) で $a=3$ と $p=\dfrac34$ と置いて ${}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2$ を用いると,
$\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+2)(k+1)}{4^k\times 2}=\sum_{k=0}^\infty{}_{k+2}\mathrm{C}_k\frac1{4^k}=\frac{4^3}{3^3}$.【別解．等比級数の和によって $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty q^{k+2}=\frac{q^2}{1-q}=-q-1+\frac1{1-q}$. 両辺を q で 2 階微分して $\displaystyle 2\sum_{k=0}^\infty{}_{k+2}\mathrm{C}_2q^k=\frac2{(1-q)^3}$. 両辺を 2 で割って $q=1-p$ と置くと $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty{}_{k+2}\mathrm{C}_2(1-p)^k=\frac1{p^3}$.】

iii) 教科書 6 章章末練習問題 6 問 3 巻末解答の $\mathrm{E}[\,X\,]$ または講義 pdf 8 のポワッソン分布の平均 m の式で $\lambda=3\log3$ と置いて $e^{-3\log3}=e^{-\log27}=\dfrac1{27}$ を使うと $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{k}{27}\frac{3^k}{k!}(\log3)^k=\sum_{k=0}^\infty k\frac{(3\log3)^k}{k!}e^{-3\log3}=3\log3$.