慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	

令和 04 年 01 月 25 日 (火) 4 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	確率論入門 II	氏　名	

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（４または５）**を必ず明記すること．

問１．　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $W_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ を原点から出発する１次元単純ランダムウォークとする．すなわち，$X_1, X_2, \ldots$ を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1 = 1\ ] = \mathrm{P}[\ X_1 = -1\ ] = \dfrac{1}{2}$ を満たすものとするとき，$W_0 = 0$ および，$k = 1, 2, \ldots$ に対して $W_k = W_{k-1} + X_k$ で k について帰納的に定義されるものとする．W_k や X_k の添字の k を歩数とも呼ぶ．

全体集合 Ω として 0 と 1 の無限列の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ を選んでこの集合の要素 $\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $X_k(\omega) = 2s_k - 1$ によって関数 X_k たちを定義するとき，この関数たちつまり確率変数列が以上の性質を持つような確率 P が存在することを講義 pdf（やレポート１）で認めた．直感的には,「無限硬貨投げ」と対応させて，表と裏が等確率の硬貨を k 回目に投げたとき表ならば $s_k = 1$ 裏ならば $s_k = 0$ と対応するように確率測度 P を定めることができることを用いるのであった．このときランダムウォーク $W_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ は直感的には１歩ごとに硬貨を投げて表裏に応じて ± 1 進むすごろくのコマの動きを表す．以下に答えよ．**答案用紙は裏面を用いず，おもて面だけに書くこと．**

i) 整数 a に対して確率変数 T_a を（レポート１または教科書 13 章 §2 の定義のとおり，）初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n = a$ となる最小の非負整数 n として，
$$A = \{\omega \in \Omega \mid T_4(\omega) > 8\} \cup \{\omega \in \Omega \mid W_8(\omega) > 0\}$$
と置くとき，A の補集合 A^c の要素が持つ性質を解くと，最初のある歩数までの動きが１種類であり，A^c はその動きを持つ要素全てを集めた集合である．この事実を
$$\underline{A^c = \{\omega \in \Omega \mid W_1(\omega) = \square,\ W_2(\omega) = \square,\ \boxed{}\ \boxed{}\}}$$
と，$W_k(\omega)$ がある数値に等しいという形の等式たちだけを用いて表すとき，右辺の空欄を適切に埋めて下線部を答えよ．答案用紙は**おもて面に**答だけでなく 4 行程度以内で小問の前の直感的な意味に基づく言葉で導出根拠を書くこと．答だけの場合は採点しない．

ii) 上の小問の A の確率 $\mathrm{P}[\ A\ ]$ を計算せよ．答案用紙は**おもて面に**答だけでなく 1 行程度の簡潔な理由も書くこと.（上の小問で問うたのは A^c だったことに注意.）

iii) n と m を非負整数として，$C_{n,m} = \mathrm{E}[\ X_n X_m\ ]$ および $V_{n,m} = \mathrm{E}[\ W_n W_m\ ]$ と置くとき，$C_{n,m}$ と $V_{n,m}$ を計算してそれぞれ n と m と数値だけで（確率変数や確率や期待値の記号を用いずに）表せ．答は場合分けを要する場合（場合によって数値が異なるなどの場合）は場合分けの条件（または演算記号等）を明確に書くこと．答案用紙は**おもて面に**答だけでなくそれぞれ 2 行程度以内の導出のための簡潔な計算または根拠理由なども書くこと．

iv) ε を正の実数，n を自然数とすると，$\mathrm{E}[\ |W_n|^2\ ] \geqq n^2 \varepsilon^2 \mathrm{P}[\ \{\omega \in \Omega \mid |W_n(\omega)| \geqq n\varepsilon\ ]$ がレポート１で復習したチェビシェフの不等式から成り立つ．このことと前の小問の結果を用いてランダムウォーク１歩あたりの原点からの平均距離 $\dfrac{1}{n}|W_n|$ について大数の弱法則に相当する結果を求めよ．答案用紙は**おもて面に**答だけでなく前の小問の結果をどう使ったか分かるように 1 行程度の簡潔な導出を書くこと．

問2．　ガウス積分を$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz$と置くとき，以下の問に答えよ．**答案用紙は裏面を用いず，おもて面だけに書くこと．**

i) aを正数とするとき，ガウス積分Iで積分変数を$z=\sqrt{a}x$によって変数変換してからaについて微分して,（レポート2または教科書または講義pdfにならって）ガウス積分とパラメータaについての微分の順序を交換しても等しいことを利用することで，Iの値を計算せずに$\frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty}z^6e^{-z^2/2}dz$を計算して数値で答えよ．答案用紙は**おもて面に**答だけでなく3行程度以内の簡潔な計算も書くこと．途中に円周率πがあからさまに書かれている解答と答だけの解答は採点しない．

ii) 2次元正規分布で密度関数が$\rho(x_1,x_2)=e^{-(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)/2+a}$で与えられるものを考える．ここで$a$は全測度1の条件が成り立つように定めた実定数である．この2次元分布の共分散行列を$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$と置くと$C$の$(i,j)$成分は$c_{ij}=\int_{\mathbb{R}^2}x_ix_j\rho(x_1,x_2)dx_1dx_2$である．

a. c_{22}を計算するために，$\int_{\mathbb{R}^2}\rho(x_1,x_2)dx_1dx_2=1$との比を考えることで$a$を消去し，重積分を$x_1$積分を先に行う逐次積分に直して，$x_1'=x_1-\frac{1}{2}x_2$で積分変数を$x_1'$に直すことでその積分は分母分子で打ち消し合い，最後にx_2積分は上の小問と同様の計算をすると

$$\underline{c_{22}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-{x_1'}^2/2}dx_1'\right)dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-{x_1'}^2/2}dx_1\right)dx_2}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{}dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{}dx_2}=\boxed{}}$$

と求まる．空欄を適切に埋めて（空欄だけでなく）**下線部全体**を答案用紙に書け．

b. 同様の計算によって分散行列Cの他の成分も求めてCを答えよ．答案用紙は答だけで良い．

iii) $X_1,X_2,\ldots,X_n$が独立同分布確率変数列で$W=X_1+X_2+\cdots+X_n$とする．X_1の（従ってどのkでもX_kの）分布が密度関数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{6e^{4/3}\pi}}e^{-x^2/6+2x/3}$を持つ連続分布（密度関数の積分で定義された1次元確率測度）のとき，確率変数Wの分布の密度関数を答えよ．答案用紙は答だけで良い．

問3．　$0<p<1$および$\lambda>0$とする．確率pで表が出る硬貨を初めて表が出るまで投げるときの裏の回数をX，1日あたりの交通事故件数が平均λのポワッソン分布に従うとき1日の交通事故件数をYと置く．すなち非負整数kに対して$\mathrm{P}[\,X=k\,]=p(1-p)^k$および$\mathrm{P}[\,Y=k\,]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$とする．$X$と$Y$は独立として，$Z=X-Y$と置く．以下に答えよ．

i) Zの期待値$\mathrm{E}[\,Z\,]$と分散$\mathrm{V}[\,Z\,]$を計算してpとλで表せ．答案用紙は答だけで良い．

ii) $Z=0$となる確率$\mathrm{P}[\,Z=0\,]$を必要なら級数も計算してpとλだけで（和の記号も使わずに）表せ．答案用紙は答だけでなく，2行程度以内で計算も簡潔に書くこと．

iii) 交通事故は日ごとに独立として，10日間の事故件数を$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{10}$と置く．すなわち，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{10}$は独立同分布確率変数列でそれぞれ平均λのポワッソン分布に従うとする．このとき10日間の合計の交通事故件数Wすなわち$W=Y_1+\cdots+Y_{10}$と置くときのWの分布を求めよ．答案用紙は答だけで良い．

問4．　（未記入ならば）**答案用紙表右上余白に登録した時限（4または5）を大きく書け．**また,（未記入ならば）答案用紙所定欄に学籍番号と氏名を明瞭に書け．

問 1 (40).

i) A の定義から $A^c=\{\omega\in\Omega\mid T_4(\omega)\leqq 8,\ W_8(\omega)\leqq 0\}$ なので，8 歩以内にマス目 4 に達して 8 歩目にはマス目 0 以下にいるコマの動きをする無限硬貨投げすべてを集めた集合だが，この条件を満たすコマの動きは最初の 8 歩が $0\to1\to2\to3\to4\to3\to2\to1\to0$ の（4 歩右に進んで 4 歩戻る）場合である．つまり，

$$\underline{A^c=\{\omega\in\Omega\mid W_1(\omega)=1,\ W_2(\omega)=2,\ W_3(\omega)=3,\ W_4(\omega)=4,\ W_5(\omega)=3,\ W_6(\omega)=2,\ W_7(\omega)=1,\ W_8(\omega)=0\}}$$

ii) A^c は最初の 8 歩で定まる集合なので 8 回の硬貨投げで 4 歩進んで 4 歩戻る確率，言い換えると 4 回表が出続けた後 4 回裏が出続ける確率だから $\mathrm{P}[\,A^c\,]=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256}$．よって $\underline{\mathrm{P}[\,A\,]=\dfrac{255}{256}}$.

iii) X_n たちは独立で $\mathrm{E}[\,X_n\,]=0$ だから $n\neq m$ ならば $C_{n,m}=\mathrm{E}[\,X_n\,]\mathrm{E}[\,X_m\,]=0$．$X_n$ の値は ±1 なので $X_n^2=1$ が恒等的に成り立つから，$C_{n,n}=1$．よって $\underline{C_{n,m}=\delta_{n,m}}$ $\left(=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m\end{cases}\right)$.

これと期待値の線形性から $\underline{V_{n,m}}=\mathrm{E}[\,W_nW_m\,]=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}\mathrm{E}[\,X_kX_\ell\,]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}\delta_{k.\ell}\underline{=m\wedge n}$ $\left(=\begin{cases}n, & n\leqq m,\\ m, & n>m\end{cases}\right)$.

iv) $\mathrm{E}[\,|W_n|^2\,]\geqq n^2\varepsilon^2\mathrm{P}[\,\{\omega\in\Omega\mid |W_n(\omega)|\geqq n\varepsilon\,]$ の左辺に前の小問の $V_{n,n}=\mathrm{E}[\,W_n^2\,]=n$ を代入して整理すると $\mathrm{P}[\,\{\omega\in\Omega\mid|W_n(\omega)|\geqq n\varepsilon\,]\leqq\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$ が成り立つ．左辺は確率なので非負で，右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束するから，極限についての挟み撃ちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}[\,\{\omega\in\Omega\mid|W_n(\omega)|\geqq n\varepsilon\,]=0$ が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つ．

問 2 (30).

i) $I=\sqrt{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2/2}dx$ から $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2/2}dx=a^{-1/2}I$ なので両辺を a で 3 階微分して $-\dfrac{1}{2^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^6e^{-ax^2/2}dx=-\dfrac{1\times3\times5}{2^3}a^{-7/2}I$．$a=1$ と置くと求める比は $\underline{15}$.

ii) a. $$\underline{c_{22}=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x_2^2e^{-3x_2^2/8}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1'^2/2}dx_1'\Big)\,dx_2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x_2^2/8}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1'^2/2}dx_1\Big)\,dx_2}=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x_2^2e^{-3x_2^2/8}\,dx_2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x_2^2/8}\,dx_2}=\frac{4}{3}}$$

b. $\underline{C=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}}$ 【$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^{-1}$】

iii) 密度関数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6e^{4/3}\pi}}e^{-x^2/6+2x/3}=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-x^2/6+2x/3-2/3}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\times3}}e^{-(x-2)^2/(2\times3)}$ を持つ分布は平均 2 分散 3 の正規分布だから $W=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の平均は期待値の線形性から $2n$ で，さらに $X_1,X_2,\ldots,X_n$ が独立だから分散の加法性から W の分散は $3n$ である．よって W の分布は平均 $2n$ 分散 $3n$ の正規分布なのでその密度関数は $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{6\pi n}}e^{-(x-2n)^2/(6n)}}$.

問 3 (30).

i) 期待値の線形性から $\underline{\mathrm{E}[\,Z\,]} = \mathrm{E}[\,X\,] - \mathrm{E}[\,Y\,] \underline{= \dfrac{1-p}{p} - \lambda}$

独立確率変数列の分散の加法性から $\underline{\mathrm{V}[\,Z\,]} = \mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,] \underline{= \dfrac{1-p}{p^2} + \lambda}$

ii) X と Y が独立だから $\mathrm{P}[\,X=k,\ Y=k\,] = \mathrm{P}[\,X=k\,]\,\mathrm{P}[\,Y=k\,]$ なので，

$$\underline{\mathrm{P}[\,Z=0\,]} = \mathrm{P}[\,X=Y\,] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,X=k,\ Y=k\,]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,X=k\,]\,\mathrm{P}[\,Y=k\,] = p\,e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)\lambda)^k \frac{1}{k!} = p\,e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} \underline{= p\,e^{-p\lambda}}$$

iii) $i = 1, 2$ に対して Y_i が平均 λ_i のポワッソン分布に従う確率変数で 2 つは独立とすると，

$$\mathrm{P}[\,Y_1 + Y_2 = k\,] = \sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{P}[\,Y_1 = \ell,\ Y_2 = k-\ell\,] = \sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{P}[\,Y_1 = \ell\,]\,\mathrm{P}[\,Y_2 = k-\ell\,]$$

$$= e^{-\lambda_1-\lambda_2} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\lambda_1^{\ell}\lambda_2^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_\ell \lambda_1^{\ell}\lambda_2^{k-\ell} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{1}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k$$

だから $Y_1 + Y_2$ は平均 $\lambda_1 + \lambda_2$ のポワッソン分布に従う．帰納的に $W = Y_1 + \cdots + Y_{10}$ は <u>平均 10λ のポワッソン分布に従う</u>．すなわち，$\mathrm{P}[\,W=k\,] = \dfrac{(10\lambda)^k}{k!} e^{-10\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.