慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50分	
令和04年07月25日(月) 6時限施行		学部　学科　年　組				
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	確率論入門 I	氏　名				

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　確率測度とは（春学期の簡単版の定義では）全体集合のどの部分集合に対しても値が定義された非負値集合関数で，全測度1と σ 加法性を満たすものである．非負整数全体を全体集合 $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$ とする下記の i) ii) iii) の集合関数 Q それぞれについて，

(a) Q が確率測度になり得ないならばその理由の鍵となる数式（計算）を答案用紙の**裏面を用いず**おもて面に1行程度以内の分量で簡潔に示し，

(b) 与えられた条件からは確率測度が1つに決まらないならば，追加でどの根元事象（要素1つだけからなる集合 $\{\omega\}$）に対する関数値を決めれば1つに決まるかを，与えるべき最小個数の値について $c_1,c_2,\ldots$ などと置いて $c_1=Q(\{\omega_1\}),\ldots$ の形で答え，かつ各々の値 c_1 などが満たすべき条件を $c_1=100$ などと答案用紙の**裏面を用いず**おもて面に答え，

(c) 確率測度 Q が条件からただ1つ定まるならば，問題に与えられていないすべての根元事象 $\{\omega\}$, $\omega\in\Omega$, について確率 $Q(\{\omega\})$ を答案用紙の**裏面を用いず**おもて面に答えよ．

i) ii) iii) それぞれ (a)(b)(c) のどれに該当するかも明記すること．

参考：$\displaystyle \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.\ \ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1.$

i) $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$.　　n が2以上の整数のとき $Q(\{n\})=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ を満たす集合関数 Q.

ii) $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$.　　n が2以上の整数のとき $Q(\{n\})=\dfrac{6}{(\pi\,n)^2}$ を満たす集合関数 Q.

iii) $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$.　　n が2以上の整数のとき $Q(\{n\})=\dfrac{2}{n!}$ を満たす集合関数 Q.

問２．　確率変数の独立や相関に関連する以下の小問に答えよ．

i) 高校1年ですでに学んだように2つの実数値確率変数 X と Y の相関係数 $r(X,Y)$ は -1 以上1以下の値しか取らない．下記が X と Y の分散がともに正の場合にこの事実の証明になるように，空欄に埋めるべき数式を**裏面を用いず**おもて面に答えよ．

「t が実数ならば期待値の非負値性と線形性から，
共分散 $\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)=\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,])(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])\,]$ を用いて，
$0\leqq \mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]+t(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])^2\,]=\mathrm{V}[\,X\,]+2t\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)+t^2\mathrm{V}[\,Y\,]$ である．
$t=\boxed{}$ を代入して適切に移項し分散が非負であることも用いて両辺の平方根を考えることで $|r(X,Y)|=\dfrac{|\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)|}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}\leqq 1$ を得る.」

ii) 1から6までの目が等確率で出るサイコロを1回投げる．確率変数 X を目が1のとき1，目が1以外のとき0，確率変数 Y を目が1のとき0，目が1以外のとき1，で定義するとき，

a. X と Y それぞれの分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ と $\mathrm{V}[\,Y\,]$ を求めよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に $\mathrm{V}[\,X\,]$ についての2行程度以内の分量の簡潔な計算とともに答えよ．答だけの答案は採

点しない．

b. 和の分散 $\mathrm{V}[\,X+Y\,]$ および X と Y の相関係数 $r(X,Y)$ を求めよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 5 行程度以内の分量の簡潔な計算とともに答えよ．答だけの答案は採点しない．

iii) 講義と教科書で，一列並びと並列並びの比較を単純なモデルで考察した．並んでいる個人（自分）にとって一列並びのほうが待ち時間のバラツキが小さいため，そのモデルでの待ち時間の期待値に比べて次の用事までの長めの余裕を見て並ぶならば，期待値から大きく外れた待ち時間になることが少ない一列並びのほうが次の用事のために買えないまま離脱する失敗が少ないので望ましい，というのが理屈の概略であった．
ところでこれを聞いた別の人が「その理屈ならば自分にとっては並列並びのほうが良さそうだ」と返事してきた．
上記の概略の理屈が正しい場合に，その理屈によって並列並びのほうが望ましいのはどういう人の場合かを答えよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 5 行程度以内の分量の簡潔な論拠とともに答えよ．講義や教科書の論点に即した論拠のない答案は採点しない．

問３． Ω を全体集合，P を Ω を全体集合とする確率測度とする．非負整数の集合 $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ に値を取る下記の i) ii) iii) の確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{Z}_+$ それぞれについて期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ を計算せよ．答案用紙はいずれも答だけでなく導出も**裏面を用いず**おもて面に 2 行程度以内の分量で簡潔に示すこと．答だけの答案は採点しない．

i) $n=0,1,2,\ldots$ のとき $\mathrm{P}[\,X=n\,]=2^{-n-1}$ を満たす確率変数 X．

ii) 定数 p は $0<p<1$ を満たすとするとき，$\mathrm{P}[\,X=0\,]=\mathrm{P}[\,X=1\,]=0$ および，$n=2,3,\ldots$ のとき $\mathrm{P}[\,X=n\,]=p\,(1-p)^{n-2}$ を満たす確率変数 X．

iii) $e=2.71828\cdots$ を自然対数の底とするとき $\mathrm{P}[\,X=0\,]=3-e=0.2817\cdots$ と，$\mathrm{P}[\,X=1\,]=0$ および，$n=2,3,\ldots$ のとき $\mathrm{P}[\,X=n\,]=\dfrac{1}{n!}$ を満たす確率変数 X．

確率論入門 I　期末試験　**略解**　　2022/07/25 服部哲弥

問 1 (30=10*3)．　【レポート 1】＋【レポート 3】

i) (c)．根元事象の確率のうち $Q(\{0\})$ と $Q(\{1\})$ だけが与えられていないが，全測度 1 と σ 加法性から
$$Q(\{0\})+Q(\{1\})=1-Q(\{2,3,\ldots\})=1-\sum_{n=2}^{\infty}Q(\{n\})=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0$$
なので，非負値性と合わせると $Q(\{0\})=Q(\{1\})=0$ と定まる．

ii) (b)．根元事象の確率のうち $Q(\{0\})$ と $Q(\{1\})$ だけが与えられていないが，全測度 1 と σ 加法性から
$$Q(\{0\})+Q(\{1\})=1-Q(\{2,3,\ldots\})=1-\sum_{n=2}^{\infty}Q(\{n\})=1-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{6}{\pi^2}(\frac{\pi^2}{6}-1)=\frac{6}{\pi^2}$$
だから，$c=Q(\{0\})$ または $c=Q(\{1\})$ のいずれかを決めれば決まり，いずれの場合も条件は，非負値性から，$0\leqq c\leqq \dfrac{6}{\pi^2}$．

iii) (a)．σ 加法性と全測度 1 から
$$Q(\{0,1\})=1-\sum_{n=2}^{\infty}Q(\{n\})=1-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=1-2(e-1-1)=5-2e=5-2\times 2.7\cdots<0$$
だから，測度の非負値性に反するので確率測度になり得ない．

問 2 (40=10+10*2+10)．　【レポート 2，教科書「統計と確率の基礎」3 章とその章末問題問 2，講義スライド 5】

i) $t=-\underline{\dfrac{\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)}{\mathrm{V}[\,Y\,]}}$.

ii) サイコロの目を Z とおくと
$$\mathrm{E}[\,X\,]=\mathrm{E}[\,X^2\,]=\mathrm{P}[\,Z=1\,]\times 1=\frac{1}{6},\ \mathrm{E}[\,Y\,]=\mathrm{E}[\,Y^2\,]=\mathrm{P}[\,Z\neq 1\,]\times 1=\frac{5}{6},$$

a. $\underline{\mathrm{V}[\,X\,]}=\mathrm{E}[\,X^2\,]-\mathrm{E}[\,X\,]^2=\dfrac{1}{6}-(\dfrac{1}{6})^2\underline{=\dfrac{5}{36}}$，$\underline{\mathrm{V}[\,Y\,]}=\mathrm{E}[\,Y^2\,]-\mathrm{E}[\,Y\,]^2=\dfrac{5}{6}-(\dfrac{5}{6})^2\underline{=\dfrac{5}{36}}$．

b. 期待値の加法性と冒頭の結果から $\mathrm{E}[\,X+Y\,]=1$．$X+Y$ は恒等的に 1 だから偏差 $X+Y-\mathrm{E}[\,X+Y\,]=0$ は恒等的に 0．よって分散の定義から
$\underline{\mathrm{V}[\,X+Y\,]}=\mathrm{E}[\,(X+Y-\mathrm{E}[\,X+Y\,])^2\,]\underline{=0}$.
共分散の公式と分散たちの結果から $\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)=\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,])(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])\,]=\dfrac{1}{2}(\mathrm{V}[\,X+Y\,]-\mathrm{V}[\,X\,]-\mathrm{V}[\,Y\,])=-\dfrac{5}{36}$．よって相関係数 $\underline{r(X,Y)}=\dfrac{\mathrm{Cov}(\,X\,,Y\,)}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}\underline{=-1}$.

iii) たとえば宝くじの常連のような，当たれば儲けものという考え方に基づいて，待ち時間の期待値よりも短い余裕しか見ないで並ぶタイプの人にとっては，バラツキがなければ確実に買えないまま次の用事に向かうために離脱して購入を失敗するので，バラツキが大きいことが購入可能性のために必要になる．この場合はバラツキの大きい並列並びのほうが望ましい理屈になる．

問 3 (30=10*3)．　【レポート 3，教科書「統計と確率の基礎」2 章章末練習問題問 4(i)，6 章章末問題問 3】

i) 和の変数を $n=k-1$ で k に取り替えることで，$\mathrm{E}[\,X\,]=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\times 2^{-n-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k\times 2^{-k}-\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=2\sum_{k=1}^{\infty}k\times 2^{-k-1}-1=2\mathrm{E}[\,X\,]-1$．よって $\mathrm{E}[\,X\,]=\underline{1}$.

ii) 既習の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k\,q^k=q\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty}q^k=q\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q}=\frac{q}{(1-q)^2}$ を用いると，$\mathrm{E}[\,X\,]=0\times 0+1\times 0+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n\times p(1-p)^{n-2}=p\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k+2p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k=p\frac{(1-p)}{p^2}+2p\frac{1}{p}=\underline{1+\frac{1}{p}}$.　【i) と同様の別解あり.】

iii) $\mathrm{E}[\,X\,]=0\times(3-e)+1\times 0+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n\times\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\underline{e-1}$.