慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	50 分						
令和 05 年 01 月 13 日 (月) 6 時限施行		学部　　学科　　年　　組								
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号								
科目名	確率論入門 II	氏　名								

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 W_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ を原点から出発する 1 次元単純ランダムウォークとする．すなわち，$X_1, X_2, \ldots$ を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\,X_1 = 1\,] = \mathrm{P}[\,X_1 = -1\,] = \dfrac{1}{2}$ を満たすものとするとき，$W_0 = 0$ および，$k = 1, 2, \ldots$ に対して $W_k = W_{k-1} + X_k$ で k について帰納的に定義する．W_k や X_k の添字の k を歩数とも呼ぶ．

ランダムウォーク W_k, $k = 1, 2, \ldots,$ は直感的には 1 歩ごとに硬貨を投げて表裏に応じて ± 1 進むすごろくのコマの動きを表す．以下に答えよ．**答案用紙は裏面を用いず，おもて面だけに書くこと．**

i) σ 加法族は Ω の部分集合たちを要素とする集合の集合（集合族）であって，可算和と補集合について閉じているものである．確率測度の定義域 $\mathcal{F}$ は定義によって σ 加法族でなければならない．$\mathcal{G} = \{\{\ \},\ \{\omega \in \Omega \mid W_3(\omega) = 1\}\}$ と置くと $\mathcal{G}$ は集合族であるが，σ 加法族ではない．最小限の集合の追加で σ 加法族になるために追加すべき集合を列挙せよ．答案用紙は答だけでよいが，$\mathcal{G}$ の要素になっている集合のように，それぞれの集合を記号だけを用いて書くこと．

ii) n を自然数とするとき分散 $\mathrm{V}[\,W_n\,]$ を計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 3 行程度以内の分量の計算ともに答を書け．答だけの答案は採点しない．

iii) n と m を $n > m$ を満たす自然数とするとき，共分散 $\mathrm{Cov}(\,W_m\,, W_n\,)$ を計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 3 行程度以内の分量の計算ともに答を書け．答だけの答案は採点しない．

問２．　ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$ と正規分布に関連する以下の小問に答えよ．

i) 次の積分を計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面にそれぞれ 2 行程度以内の分量の計算ともに答を書け．答だけの答案は採点しない．　(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{y-\frac{y^2+1}{2}}dy$,　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} y\,e^{-y^4/2}dy$.

ii) 1 次元正規分布は実数 $\mathbb{R}$ を全体集合とする確率測度で，密度関数の積分で定義され，密度関数が 2 次多項式の指数関数であるものを言う．講義（スライド・教科書）によれば平均 m 分散 $v > 0$ の 1 次元正規分布の密度関数 $\rho_{m,v}$ は $\rho_{m,v}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(x-m)^2/(2v)}$ であった．n を非負**偶数**とする．この分布に対して n 次モーメントを $M_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho_{m,v}(x)\,dx$ と置くとき，比 $\dfrac{M_{n+2}}{M_n}$ を求めよ．答案用紙は，ガウス積分をあからさまに**用いずに**部分積分を利用して積分が分母分子で打ち消すように計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 5 行程度以内の分量の計算ともに答を書け．答だけの答案は採点しない．

iii) 実 2 成分確率変数 $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ が平均 $\overrightarrow{0}$ の 2 次元正規分布に従うとき，その分布の密度関

数 ρ は正定値対称 2 次正方行列 $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ を用いて $\rho(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{\det G}}{2\pi} e^{-(\overrightarrow{x}, G\overrightarrow{x})/2}$ と書けることが分かっている．ここで右辺の指数部は $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $G\overrightarrow{x}$ の内積の $-\dfrac{1}{2}$ 倍である．また $\overrightarrow{X}$ の共分散行列を $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ と置くと，（平均 $\overrightarrow{0}$ なので）$c_{ij} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} x_i x_j \rho(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ である．$\delta_{11} = \delta_{22} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ と置く（クロネッカーのデルタと呼ばれる標準の記号）と，前小問と同様に被積分関数は $|x_j| \to \infty$ のとき 0 に収束することと全測度 1 の性質から $0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i \rho(\overrightarrow{x}))\, dx_1 dx_2 = \delta_{ij} + \int_{\mathbb{R}^2} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho(\overrightarrow{x})\, dx_1 dx_2$ と変形できる．右辺の被積分関数内の偏微分を実行して内積の定義と G の対称性を用いて整理した後に移項することで行列の等式 $\boxed{\text{(a)}\quad} = E$ を成分で書いた式を得る．ここで E は 2 次単位正方行列である．したがって共分散行列 C は密度関数の指数部の 2 次形式の係数行列 G を用いて $C = \boxed{\text{(b)}\quad}$ と書ける．空欄 (a)(b) を適切な行列の式で埋めよ．答案用紙は答だけでよい．

iv) n と n' を $n > n'$ を満たす自然数とし，$X_1, \ldots, X_n$ を独立確率変数列で $i = 1, \ldots, n$ 各々について X_i の分布は平均 m_i 分散 $v_i > 0$ の正規分布とする．このとき最初の n' 個の和と n 個の和の共分散 $\mathrm{Cov}(\ X_1 + \cdots + X_{n'}, X_1 + \cdots + X_n\ )$ を計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 3 行程度以内の分量の計算とともに答を書け．答だけの答案は採点しない．

問 3． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実数値の独立確率変数列に関する以下の小問に答えよ．

i) 定数たち m_1, m_2, m_3 を実数，v_1, v_2, v_3 を正数とする．X_1, X_2, X_3 を（長さ 3）の独立実数値確率変数列で，$i = 1, 2, 3$ それぞれについて X_i は期待値 m_i 分散 v_i の正規分布に従うとするとき和の確率変数 $Y = X_1 + X_2 + X_3$ の分布の確率密度関数 ρ を求めよ．それぞれが正規分布に従う独立確率変数列の和は正規分布に従うことは既知とせよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 2 行程度以内の分量の理由とともに答を $\underline{\rho(x) = \cdots}$ のように書け．答だけの答案は採点しない．

ii) k を自然数とし，$i = 1, 2, \ldots, k$ それぞれについて λ_i を正定数とする．$X_1, X_2, \ldots, X_k$ を独立実数値確率変数列で，それぞれの i について X_i は期待値 λ_i のポワッソン分布に従うとするとき和の確率変数 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ の分布を求めよ．それぞれがポワッソン分布に従う独立確率変数列の和はポワッソン分布に従うことは既知とせよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 2 行程度以内の分量の理由とともに答を $\underline{\mathrm{P}[\ Y = n\ ] = \cdots,\ n = 0, 1, 2, \ldots}$ のように書け．答だけの答案は採点しない．

iii) 1 日ごとに一定の割合で故障して使えなくなる電子部品が 2 種類あり，初日に壊れた場合を持ちこたえた日数 0 と数えて，持ちこたえた日数を 2 種類それぞれについて確率変数 X と Y で表すと，前者は $\dfrac{\mathrm{P}[\ X \geqq n+1\ ]}{\mathrm{P}[\ X \geqq n\ ]} = \dfrac{19}{20}$ が，後者は $\dfrac{\mathrm{P}[\ Y \geqq n+1\ ]}{\mathrm{P}[\ Y \geqq n\ ]} = \dfrac{9}{10}$ が，すべての日数 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して成り立つとする．また 2 種類の故障は独立な事象とする．このとき後者が前者の部品よりも長持ちする確率を計算せよ．答案用紙は**裏面を用いず**おもて面に 8 行程度以内の分量の理由とともに答を $\underline{\mathrm{P}[\ \cdots\ ] = \cdots}$ のように書け．答だけの答案は採点しない．

問 1 (30).　【レポート 1】

i) $\{\omega\in\Omega \mid W_3(\omega)\neq 1\}$ と Ω.（補集合について閉じる必要がある．このとき $\{\{\ \},A,A^c,\Omega\}$ の形になるが，これが σ 加法族であることは定義からわかる.）

ii) $i=1,\ldots,n$ それぞれについて，X_i の定義から $\mathrm{E}[\,X_i\,]=1\times\dfrac{1}{2}+(-1)\times\dfrac{1}{2}=0$，したがって $\mathrm{V}[\,X_i\,]=\mathrm{E}[\,X_i^2\,]=\mathrm{E}[\,1\,]=1$．$X_1,\ldots,X_n$ が独立なので分散の加法性から $\mathrm{V}[\,W_n\,]=\mathrm{V}[\,X_1\,]+\cdots+\mathrm{V}[\,X_n\,]=n$.

iii) $W_n-W_m=X_{m+1}+\cdots+X_n$ と $W_m=X_1+\cdots+X_m$ は独立なので，共分散の双線形性を先に使うことで

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(\,W_m\,,W_n\,)=\mathrm{Cov}(\,W_m\,,W_m\,)+\mathrm{Cov}(\,W_m\,,W_n-W_m\,)\\
&=\mathrm{V}[\,W_m\,]+\mathrm{E}[\,W_m-\mathrm{E}[\,W_m\,]\,]\,\mathrm{E}[\,(W_n-W_m)-\mathrm{E}[\,W_n-W_m\,]\,]\\
&=\mathrm{V}[\,W_m\,]+(\mathrm{E}[\,W_m\,]-\mathrm{E}[\,W_m\,])\,\mathrm{E}[\,(W_n-W_m)-\mathrm{E}[\,W_n-W_m\,]\,]=\mathrm{V}[\,W_m\,]=m.
\end{aligned}
$$

問 2 (40).　【レポート 2】

i) (a) 積分変数変換 $y=x+1$ の後に被積分関数が偶関数であることとガウス積分から
$\displaystyle\int_1^\infty e^{y-\frac{y^2+1}{2}}dy=\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
(b) 積分変数変換 $y=\sqrt{x}$ の後に (a) と同様に
$\displaystyle\int_0^\infty y\,e^{-y^4/2}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$,

ii) 積分範囲が原点に関して対称なので奇関数の積分は 0 だから n が偶数のとき
$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^{n+1}e^{-(x-m)^2/(2v)}dx=0$．よって

$$
\begin{aligned}
M_{n+2}&=M_{n+2}-m\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^\infty x^{n+1}e^{-(x-m)^2/(2v)}dx\\
&=-v\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^\infty x^{n+1}\frac{d}{dx}\left(e^{-(x-m)^2/(2v)}\right)dx\\
&=v\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^\infty (n+1)x^n e^{-(x-m)^2/(2v)}dx=(n+1)vM_n\,.
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{M_{n+2}}{M_n}=(n+1)v$.

iii) (a) $GC=E$,　(b) $C=G^{-1}$.

iv) 共分散はそれぞれの確率変数について線形なので $\mathrm{Cov}(\,X_1+\cdots+X_{n'}\,,X_1+\cdots+X_n\,)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(\,X_i\,,X_j\,)$ だが，独立な確率変数列なので $i\neq j$ ならば $\mathrm{Cov}(\,X_i\,,X_j\,)=0$ であり，$i=j$ ならば $\mathrm{Cov}(\,X_i\,,X_i\,)=\mathrm{V}[\,X_i\,]=v_i$ なので，
$\displaystyle\mathrm{Cov}(\,X_1+\cdots+X_{n'}\,,X_1+\cdots+X_n\,)=\sum_{i=1}^{n'}v_i$.

問 3 (30).　【レポート 3】

i) 期待値の加法性から $\mathrm{E}[\,Y\,]=m_1+m_2+m_3$，独立確率変数列の和の分散の加法性から $\mathrm{V}[\,Y\,]=v_1+v_2+v_3$．$Y$ の分布が正規分布であることは認めるので，確率密度関数は
$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2+v_3)}}e^{-(x-(m_1+m_2+m_3))^2/(2(v_1+v_2+v_3))}$.

ii) 期待値の加法性から $\mathrm{E}[\,Y\,] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$，$Y$ の分布がポワッソン分布であることは認めるので，その分布は $\underline{\mathrm{P}[\,Y = n\,] = e^{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots}$.

iii) 一般化できるので $p = \frac{1}{20}$ および $q = \frac{1}{10}$ と置く．X と Y は非負整数の値を取るので $\mathrm{P}[\,X \geqq 0\,] = \mathrm{P}[\,Y \geqq 0\,] = 1$ だから，題意と合わせると $\mathrm{P}[\,X \geqq n\,] = (1-p)^n$ および $\mathrm{P}[\,Y \geqq n\,] = (1-q)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. 従ってさらに $\mathrm{P}[\,X = n\,] = \mathrm{P}[\,X \geqq n\,] - \mathrm{P}[\,X \geqq n+1\,] = p(1-p)^n$. 事象 $\{Y > X\}$ を X の値について場合分けして，X と Y の独立性を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[\,Y > X\,] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,Y \geqq n+1,\ X = n\,] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,Y \geqq n+1\,] \times \mathrm{P}[\,X = n\,] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^{n+1} p(1-p)^n = (1-q)p \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)(1-q))^n = \frac{(1-q)p}{p+q-pq}.
\end{aligned}
$$

$p = \frac{1}{20}$ および $q = \frac{1}{10}$ を代入すると $\underline{\mathrm{P}[\,Y > X\,] = \frac{9}{29}}$.