慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分		

											採　点　欄	※
2009 年 7 月 22 日 (水) 6 時限施行		学部　　学科　年　組										
担当者名	服　部　哲　弥	学籍番号										
科 目 名	線　形　代　数	氏　　名										

注意：　答案用紙のおもてがわに収まるように，問題番号の順番に解答すること．

問１．　次の行列の積 i) と ii) を計算せよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくて良い．)

i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

問２．　行列式 $\begin{vmatrix} 11 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ を計算せよ．(答案用紙には途中の計算は書かなくて良い．)

問３．　a, b, c を実数とする．

i) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$ の余因子 $\tilde{A}$ を求めよ．

ii) A が正則になる a, b, c の必要十分条件を求めよ．

iii) $a = b = 1$ かつ $c = -\dfrac{1}{2}$ のとき，逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ を求めよ．

（いずれも，答案用紙には途中の計算は書かなくて良い．）

問４．　次の 3 つのベクトルが 1 次独立か 1 次従属かを調べよ．答案用紙には問題番号と答の他に**根拠を簡単でよいから，必ず書くこと**（結果のみの場合は加点しない）．

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

線形代数　期末試験　**略解**　　2009/07/23 服部哲弥

問 1 (26).　【テキスト p.9 問 3 類題】行列の積

i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}}$

問 2 (24).　【テキスト p.16 定理 5,5’ 利用（同ページ 例，問 1 類題）】行列式

$$\begin{vmatrix} 11 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

（4 列 +1 列 +2 列→ 4 列）

$$= \begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ （1 行 −4 行→ 1 行，2 行 −4 行→ 2 行，3 行 +4 行→ 3 行）

$$= 4 \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \text{（4 列目の展開）} = 4 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \underline{= 24}$$

問 3 (24).　【テキスト p.23 問 1(3) 類題】余因子と逆行列

i) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$ の余因子 $\tilde{A} \underline{= \begin{pmatrix} bc & -c & 1 \\ 1 & ac & -a \\ -b & 1 & ab \end{pmatrix}}$

ii) $|A| = abc + 1$ なので，正則になる条件は $\underline{abc \neq -1}$

iii) $a = b = 1,\ c = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$

問 4 (26).　【テキスト p.34 問 (1) 類題】1 次独立，1 次従属

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を並べた行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ は，1 行目 +2 行目=3 行目 なので，階数が 3 未満である．したがって，3 つのベクトルは 1 次従属.（別解．階数が 3 未満であることを言うのに，行の間の従属関係の代わりに，行基本変形によって $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることから階数 2 としてもよいし，行列式を計算して 0 になることを見てもよい．さらに，1 つ目のベクトル $\times 3 -$ 2 つ目のベクトル $\times 2 =$ 3 つ目のベクトル を見抜けば 1 次従属であることが直接わかる.）