慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

									試験時間	50 分	
2010 年 1 月 27 日 (水) 6 時限施行		学部　　学科　年　　組							採　点　欄	※	
担当者名	服　部　哲　弥	学籍番号									
科 目 名	線形代数続論	氏　　名									

注意：　答案用紙の表がわに収まるように簡潔に解答すること．

問 1．　3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ と 3×3 行列に関する以下の問いに答えよ.（答案には途中の計算は書かなくて良い.）

i) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を満たす実数の組 (c_1,c_2,c_3,c_4) の，全て 0 という答えを除く，例を 1 組書け.（答案は答えのみで良い.）

ii) 2 個の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ と $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間 $V=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ の正規直交基底を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ からシュミットの直交化法によって求めよ.（答案は答えのみで良い.）

iii) 上の問いの V の $\mathbb{R}^3$ における直交補空間 $V^\perp$ を求めよ.（答案は答えのみで良い.）

iv) 行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ の固有値と，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.（答案は答えのみで良い.）

v) a を定数とするとき，対称行列 $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ を対角化せよ．すなわち，$D=P^{-1}AP$ が対角行列になる直交行列 P と D を求めよ.（答案は答えのみで良い.）

問 2．　次の文章の空欄 (a) から (f) までに当てはまる言葉を下記の語群から選び，(z) 線形代数 のように解答せよ.（同じ記号の空欄は同じ語が入る．語群には誤った単語もある.）

3 次元数ベクトルの集合 $V\subset\mathbb{R}^3$ が線形空間であるとは，$\mathbf{0}\in V$ および，V が和とスカラー倍に関して閉じていることを言う．$\mathbb{R}^3$ も線形空間である．何個かのベクトルのスカラー倍の和をそれらのベクトルの線形結合と言う．線形空間 V が $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の全ての線形結合を要素に持つ集合に等しいとき，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は V を (a) する，と言い，$V=\langle\mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle$ と書く.

$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ となるためには $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$ でなければならないとき，ベクトルの組 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ は (b) であると言い，(b) でないとき (c) という．4 個以上の $\mathbb{R}^3$ のベクトルは (c) である．(b) なベクトルの組が線形空間 V を (a) するときその組は V の基底であると言う.

数ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の内積 $(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ が 0 に等しいとき $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は直交するという．互いに直交するノルム 1 のベクトルからなる基底を (d) と呼ぶ．$\mathbf{v}\in V$ を (d) の線形結合で表すときの係数は，基底のベクトルと $\mathbf{v}$ の内積を考えると容易に求まる．V の基底からシュミットの直交化法によって V の (d) を具体的に作れる．全ての $\mathbf{v}\in V$ と直交する $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ の集合 $V^\perp$ を V の (e) と呼ぶ.

3 次正方行列 A に対して $A\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}$ となる $\mathbf{0}$ ではない $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ があるとき α を A の固有値，$\mathbf{u}$ を (f) という．α は $|A-\alpha E|=0$ を満たす．1 つの固有値の (f) の集合と $\{\mathbf{0}\}$ の和集合は線形空間をなす.

語群：　消滅　生成　被覆　線形　確定　1 次独立　1 次直交　1 次補空間　1 次関数　1 次写像　1 次ベクトル　1 次従属　線形空間　線形基底　直交空間　直交基底　直交補空間　補集合　基底空間　直交ベクトル　正規直交基底　正規直交補空間　正規直交ベクトル　固有空間　固有ベクトル　固有基底　正規固有空間　正規固有基底

問 3．　都合により問題を省略します.

問 1 (10*5).

i) 【テキスト p.40 問 類題（直交性に気づけばより容易)】
$(1,0,-2,1)$ など，答えが $\underline{c_2=0,\ c_4=c_1,\ c_3=-2c_1}$ を満たせば（満たすときのみ）正解.
（注．与式の左辺のベクトルを順に $\mathbf{v}_i$, $i=1,2,3,4$, とおくとき，$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4$ は互いに直交していることに気づけば，これらのベクトルと与式の内積をとって，内積の双線形性を用いて容易に解ける.）

ii) 【テキスト p.53 問 類題】
$$\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.}$$
（注．正規直交基底という問題ならば，直交する 2 個のベクトルの組で，両方とも $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$（次問参照）と直交するもの，は全て正解だが，ここはシュミットの直交化法の問題．$\mathbf{v}$ から直交化法を適用すれば $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.）

iii) 【テキスト p.51 説明の応用問題】
$$\underline{V^{\perp}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle=\{c\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{R}\}}.$$ 基底は $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ など，比例していて $\mathbf{0}$ でなければ可.
（注．V の基底と直交するベクトルが $V^{\perp}$ の基底だから，$(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\mathbf{v})=(\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\mathbf{v})=0$ となる $\mathbf{v}$ を求めればよい．成分で表して，直接計算するか掃き出し法で $\begin{pmatrix}-1&4&1\\1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$.）

iv) 【テキスト p.59 問 類題】
固有値は 2（重複度 1）と -1（重複度 2）. 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.（比例している $\mathbf{0}$ でないベクトルならば可.）固有値 -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.（全成分足して 0 になる独立な 2 個のベクトルならば可.）

v) 【テキスト p.65 問 数値を変えただけ】
$$P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ とおくと ${}^tPP=E$，かつ $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a-\sqrt{2}&0\\0&0&a+\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$
（P の列の順序は交換可能，対応して対角行列の並び方が変わる．列毎の符号逆転も可.）

問 2 (30).　(a) 生成　(b) 1 次独立　(c) 1 次従属　(d) 正規直交基底　(e) 直交補空間　(f) 固有ベクトル

問 3 (20).　都合により解答例を省略します.