慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分	

平成 23 年 1 月 26 日 (水) 6 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	線形代数続論	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　解答は答えだけでよいが，答案用紙の表がわに収めること．

問 1．　s と t を正の実数とする．ベクトルの組 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3s \\ 4s \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3t \\ 4t \end{pmatrix}$ からシュミットの直交化法によって正規直交基底 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ を求めるための以下の小問に答えよ．

i) $\mathbf{a}_1$ のノルム $\|\mathbf{a}_1\|$ を求めよ．
ii) $\mathbf{a}_1$ を規格化した（スカラー倍してノルム 1 にした）ベクトル $\mathbf{u}_1$ を求めよ．
iii) $\mathbf{a}_2$ を $\mathbf{u}_1$ に比例するベクトル（$\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ の要素）と直交するベクトル $\mathbf{b}_2$ の和に書く（直和分解する）とき，$\mathbf{b}_2$ を求めよ．
iv) $\mathbf{b}_2$ を規格化したベクトル $\mathbf{u}_2$ を求めよ．

問 2．　c を実数とする．実対称行列 $A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ を対角化するための以下の小問に答えよ．

i) A の固有値 α_1, α_2 を求めよ．
ii) $i = 1, 2$ それぞれについて，A の固有空間 $W(\alpha_i)$ を生成するベクトル $\mathbf{a}_i$ を 1 つずつ求めよ．
iii) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ を正規直交化した $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を並べて，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P を求めよ．

問 3．　実数上の数ベクトル空間とその部分線形空間に関する以下の記述の 15 種類の空欄 (a) から (o) までに当てはまる数値，記号，または語句を，下記の語群から選び，(z) $y - 2z$ のように解答せよ．(語群で括弧付きのものは括弧内の語句も同じ意味で用いるのでどちらでも良い．同じ記号の空欄には同じ語句が入るが，異なる記号の空欄に同じ語句を使う場合がありうる．なお，語群には正しくない語句もある．)

i) x を実数として $\begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$ という形（この式を以下 (*) とおく）に書ける 2 成分ベクトルを全て集めた集合を V とおく．

(0) 零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は，(*) において $x = \boxed{\text{(a)}}$ の場合なので，V の要素である．

(1) V の任意の 2 つの要素 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2b \\ 3b \end{pmatrix}$ に対して $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は，(*) において $x = \boxed{\text{(b)}}$ の場合なので，V の要素である．

(2) 任意の実数 λ と V の任意の要素 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ に対して $\lambda\mathbf{a}$ は，(*) において $x = \boxed{\text{(c)}}$ の場合なので，V の要素である．

以上 (0)(1)(2) によって V は 2 成分ベクトルを全て集めた集合 $\mathbb{R}^2$ の $\boxed{\text{(d)}}$ である．

ii) 与えられたベクトルの組の $\boxed{\text{(e)}\quad}$ が零ベクトルに等しいとき，係数が全て 0 という自明な場合以外の係数の組み合わせが無いとき，そのベクトルの組は $\boxed{\text{(f)}\quad}$ であると言い，自明で無い係数の組み合わせで $\boxed{\text{(e)}\quad}$ が零ベクトルに等しくなることがあるとき，そのベクトルの組は $\boxed{\text{(g)}\quad}$ であると言う．たとえば，3 つの実数 2 成分のベクトル $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の組は，$\lambda_1 = \boxed{\text{(h)}\quad}$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = \boxed{\text{(i)}\quad}$，のとき $\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$ を満たすので，$\boxed{\text{(j)}\quad}$ である．

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．4 次元ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して $f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ とおくことで，$\boxed{\text{(k)}\quad}$ $f_A\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を定義する．$\mathbb{R}^4$ の 2 つの要素，$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ について，$f_A(\mathbf{v}_1) = f_A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ なので，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ はどちらも $\boxed{(\ell)\quad}$ の要素である．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ はすぐわかるように 1 次独立なので，$\boxed{(\ell)\quad}$ の次元は $\boxed{\text{(m)}}$ 以上である．また，$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について $f_A(\mathbf{v}_3)$ と $f_A(\mathbf{v}_4)$ が 1 次独立であることもわかるので，$\boxed{\text{(n)}\quad}$ の次元は $\boxed{\text{(o)}}$ 以上である．ところで，f_A の定義域は $\mathbb{R}^4$ だから，$\dim \operatorname{Im} f_A + \dim \operatorname{Ker} f_A = 4$ なので，以上の考察を合わせると，$\dim \boxed{(\ell)\quad} = \boxed{\text{(m)}}$ かつ $\dim \boxed{\text{(n)}\quad} = \boxed{\text{(o)}}$ と定まる．すなわち，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は $\boxed{(\ell)\quad}$ の基底であり，$A\,\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $A\,\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\boxed{\text{(n)}\quad}$ の基底である．

語群： 線形写像　非線形写像　線形結合（1 次結合）　非線形結合（2 次結合）　全体空間（全線形空間）　部分空間（部分線形空間）　1 次独立　2 次独立　1 次従属　2 次従属　$\operatorname{Im} f_A$（f_A の像）　$\operatorname{Ker} f_A$（f_A の核）　$\lambda + a$　$\lambda - a$　$\lambda\,a$　λ/a　$a+b$　$a-b$　$a\,b$　a/b　$y-2z$　0　1　-1　2　-2　3　-3　4　-4　5　-5

線形代数続論　期末試験　**略解**　　2011/01/26 服部哲弥

問 1 (40=10*4).　【テキスト p.53 問 類題】

i) $\|\mathbf{a}_1\| = 5s$

ii) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

iii) $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -96t/25 \\ 72t/25 \end{pmatrix}$

iv) $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

問 2 (30=10*3).　【テキスト p.65 問 類題】

i) $\alpha_1 = c+1,\ \alpha_2 = c-1$　（順不同）

ii) 例：$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　（$i=1,2$ は前小問と同順．それぞれ，2 成分が等しいベクトルと 2 成分の和が 0 になるベクトルで零ベクトル以外ならば正解.）

iii) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$（列の並び方は前小問と同順．列ごとに逆符号の別解.）

問 3 (30=2*15).　【テキスト第４章または講義（レジメ）該当部分の説明】

(a) 0　(b) $a+b$　(c) λa　(d) 部分線形空間　(e) 線形結合　(f) 1 次独立
(g) 1 次従属　(h) -3　(i) 0　(j) 1 次従属　(k) 線形写像　(ℓ) $\mathrm{Ker}\, f_A$
(m) 2　(n) $\mathrm{Im}\, f_A$　(o) 2