慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	**50** 分	分
平成 24 年 1 月　日 (　)　時限施行		学部　学科　年　組			採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	線形代数続論	氏　名				

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問１．　実数上の数ベクトル（線形）空間とその部分（線形）空間に関する以下の箇条書きの 5 個の空欄 (a) から (e) までに，テキストおよび講義の線形代数の主要な用語の中から適切なものを入れて，(z) 線形空間 のように解答せよ．同じ記号の空欄には同じ用語が入る．

(0) n を自然数とする．実数 n 成分からなるベクトルを全て集めた集合 $\mathbb{R}^n$ は，ベクトルの加法（成分毎の和）とスカラー倍（全成分の一斉実数倍）について閉じているので線形空間である．

(1) $\mathbb{R}^n$ のいくつかの要素，すなわち，n 成分ベクトルたち，を各々スカラー倍して和をとって得られるベクトルを，元のベクトルたちの線形結合という．スカラーを全て 0 に選べば線形結合は当然零ベクトル $\overrightarrow{0}$ になる．n 成分ベクトルたちが与えられたとき，それが $\boxed{\text{(a)}\quad}$ であるとは，それらの線形結合が零ベクトル $\overrightarrow{0}$ になるようなスカラーの組み合わせが，全て 0 という自明なものに限ることを言う．

(2) n 成分ベクトルたちが一組与えられたとき，その線形結合で得られる全て（あらゆるスカラー倍の組み合わせ）のベクトルを集めた集合を，そのベクトルたちが $\boxed{\text{(b)}\quad}$ する線形空間（部分空間）という．さらに，そのベクトルの組が $\boxed{\text{(a)}\quad}$ のとき，そのベクトルの組はその線形空間の $\boxed{\text{(c)}\quad}$ であるという．$\mathbb{R}^n$ の部分線形空間には必ず $\boxed{\text{(c)}\quad}$ がある．その取り方は無数にあるが，1 つの線形空間を選ぶと $\boxed{\text{(c)}\quad}$ をなすベクトルの個数は $\boxed{\text{(c)}\quad}$ の取り方によらない．その数をその線形空間の $\boxed{\text{(d)}\quad}$ という．

(3) n 次正方行列 A が与えられたとき，$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $A\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ を対応させる写像を f_A とおく．$\mathbb{R}^n$ の部分線形空間の典型例として，f_A の $\boxed{\text{(e)}\quad}$，すなわち $\mathrm{Im} f_A = \{A\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$ で定義される集合と，f_A の核，すなわち $\mathrm{Ker} f_A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\overrightarrow{x} = 0\}$ で定義される集合がある．$\mathrm{Im} f_A$ も $\mathrm{Ker} f_A$ も線形空間であり，それぞれの $\boxed{\text{(d)}\quad}$ の和は n になる．

問２．　ベクトルの組 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ からシュミットの直交化法によって正規直交基底 $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ を求める手続きに関連して以下の小問に答えよ．答案は答えだけでよい．

i) 内積 $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$，および，$\overrightarrow{a}$ のノルム $\|\overrightarrow{a}\|$ を求めよ．

ii) あるベクトルをノルムが 1 になるようにスカラー倍することを規格化（正規化）と言う．$\overrightarrow{a}$ を規格化したベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めよ．

iii) $\mathbb{R}^3$ の部分（線形）空間 V があるとき，V のどのベクトルとも直交するベクトルたちからなる集合を直交補空間 $V^{\perp}$ と言う．$V^{\perp}$ は線形空間である．$\mathbb{R}^3$ のベクトルを，V に属するベクトルと $V^{\perp}$ に属するベクトルの和に書くことを元のベクトルの直和分解と言い，V に属するほうのベクトルを元のベクトルの V への正射影と言う．($V^{\perp}$ についても同様に $V^{\perp}$ への正射影という.)

$V = \langle \overrightarrow{u} \rangle$（問 2–ii で得たベクトル $\overrightarrow{u}$ が生成する線形空間）とおくとき，冒頭に与えた $\overrightarrow{b}$ の V への正射影 $\overrightarrow{b}'$ を求めよ．さらに，$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}'$ を規格化した（$\overrightarrow{u}$ と直交する）ベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めよ．

iv) 冒頭に与えた $\overrightarrow{c}$ の，$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^{\perp}$ への正射影を規格化したベクトル $\overrightarrow{w}$ を求めよ．

問 3． 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+2\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化するための以下の小問に答えよ．答案は答えだけでよい.（なお，一部の用語については問 1 と問 2 も参照.）

i) 規格化されたベクトル $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであることは固有ベクトルの定義（あるスカラー α があって，$A\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{u}$ が成り立つこと）を直接計算してみるとわかる．対応する固有値 α を求めよ．

ii) 問 3–i で得た α に対応する固有空間（固有ベクトルが生成する線形空間）$W(\alpha)$ の正規直交基底を，固有方程式 $A\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{v}$ を解くことで,（必要ならばさらに Schmidt の直交化法を用いて,）求めよ．**ただし，答えのベクトルのうち 1 つ（Schmidt の方法で最初に求めるベクトル）は問 3–i で与えた $\overrightarrow{u}$ にとること．**

iii) $W(\alpha)$ の直交補空間 $W(\alpha)^{\perp}$ の規格化された（すなわち，ノルム 1 の）ベクトルを 1 つ求めよ．

iv) A を対角化する，すなわち ${}^{t}PAP$ が対角行列になる，直交行列 P を求め，対応する対角行列 $D = {}^{t}PAP$ を求めよ．

線形代数続論　期末試験　**略解**　　　　2011/01/　服部哲弥

問 1 (20=4*5).　【テキスト第４章または講義の説明】

(a) １次独立（線形独立）　(b) 生成　(c) 基底　(d) 次元　(e) 像

問 2 (40=10*4).　【テキスト p.53 例 類題，p.51–52 説明】

i) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 6$, $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{6}$

ii) $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $\overrightarrow{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

iv) $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$　$\left(\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{v} = \dfrac{13}{30} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

問 3 (40=10*4).　【テキスト p.64–65 例 類題】

i) $\alpha = 2\sqrt{2}$

ii) $W(2\sqrt{2}) = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \pm\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

（複号はどちらでも可．固有方程式から $\sqrt{2}x + y + z = 0$ を得るので答えを得る.）

iii) $\pm\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（複号はどちらでも可．たとえば，$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から Schmidt の直交化法によって $W(\alpha)^{\perp}$ のベクトルを得る.）

iv) $P = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

（別解を許す.）