慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50分	分

平成24年07月24日(火)　時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	線形代数	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問１．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．以下の量 i)，ii)，iii)，iv) を計算せよ．答案は計算結果だけでよい．

i)　積 AB.　　ii)　行列式 $|A|$.　　iii)　対角行列の逆行列 B^{-1}.　　iv)　行列式 $|A^{-1}B^{-1}|$.

問２．　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を行基本変形して，左半分の $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の部分を単位行列に変形する方法で A^{-1} を求めよ．答案用紙には

（解答例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

のように，最後の答え A^{-1} の他に，**最初の変形と最後の変形も記入すること**.

問３．　次の i) ii) iii) は，それぞれに与えられたベクトルの組について，1次独立か1次従属かに関わる記述である．空欄 (1)—(6) に入る適切な数値または語句を答えよ．(1)(3)(5) は数値，(2)(4)(6) は 1次独立 または 1次従属 である．答案用紙には (7) 5 のように答えのみを書け．

i) $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数の組 x, y, z として，たとえば $x = \boxed{(1)\quad}$, $y = 1$, $z = -1$ を選べるので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ は $\boxed{(2)\qquad\quad}$ である．

ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の rank（階数，行標準変形した結果0以外の要素が残る行数）が $\boxed{(3)\quad}$ なので，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\boxed{(4)\qquad\quad}$ である．

iii) x を実数とし，$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ と置く．x が何であっても，内積 $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ とノルムの積との間に $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| \leqq \sqrt{\|\overrightarrow{a}\|\,\|\overrightarrow{b}\|}$ という大小関係が成り立つが，等号が成り立つのは $x = \boxed{(5)\quad}$ のときであり，このとき $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ は $\boxed{(6)\qquad\quad}$ である．

線形代数　期末試験　**略解**　　　　　　　　　　2012/07/25 服部哲弥

問 1 (40=10*4).　　　【講義２（行列の積），講義７（逆行列），講義６（積の行列式）】

i) $AB = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.　　ii) $|A| = \underline{4}$.　　iii) $B^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$.

iv) $\left|A^{-1}B^{-1}\right| = |A^{-1}|\,|B^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}\dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{36} = \underline{\dfrac{1}{144}}$.

問 2 (30=10*3).　　　【講義９，１０（行基本変形による逆行列）】

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$.（変形は解答例であって，別解を許す.）

問 3 (30=5*6).　　　【講義１２（1 次独立，1 次従属，内積）】

i) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数の組 x, y, z として，たとえば $x = \underline{(1)\ -3}$, $y = 1$, $z = -1$ を選べるので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ は <u>(2) 1 次従属</u> である.

ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の rank（階数，行標準変形した結果 0 以外の要素が残る行数）が <u>(3) 2</u> なので，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は <u>(4) 1 次従属</u> である.

iii) x を実数とし，$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ と置く．x が何であっても，内積 $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ とノルムの積との間に $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| \leqq \sqrt{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$ という大小関係が成り立つが，等号が成り立つのは $x = \underline{(5)\ 3}$ のときであり，このとき $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は <u>(6) 1 次従属</u> である.