慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	**50** 分	分
平成 25 年 1 月 29 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組		採　点　欄	※	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	線形代数続論	氏　名				

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問 1．　5 個の 3 次元ベクトル $\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\-5\\-5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\-11\\-9\end{pmatrix}$, について，以下の問に答えよ．

i) この 5 個のベクトルのうちで 1 次独立という条件を満たす中で一番個数の多い組み合わせを一組選べ．答案用紙は答（選んだベクトルたち）だけを書け．

ii) 上で選んだベクトルが生成する線形空間（$\mathbb{R}^3$ の部分空間）の $\mathbb{R}^3$ における直交補空間の基底を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iii) ベクトル $\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ が生成する線形空間への正射影を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iv) 最初の 5 個のベクトルを与えられた順に横に並べてできる 3 行 5 列の行列を A，$f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ によって定まる線形写像を $f_A\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ とおく．このとき f_A の像 $\mathbf{Im} f_A$ の基底になるように最初の 5 個の中からベクトルの組を選べ．答案用紙は答（選んだベクトル）だけを書け．

問 2．　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \boxed{} \\ \boxed{} & \frac{2}{3} & \frac{19}{6} \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

i) A が対称行列になるように空欄を埋めよ．答案用紙には行列 A 全体を書け．

ii) A の固有多項式 $\phi(t) = |t\,E - A|$ を計算せよ．(E は単位行列.) 答案用紙は展開しきった形の答だけを書け．

iii) A の固有値を全て求めよ．

iv) A の各固有値に対応する規格化された固有ベクトルを全て求めよ．答案用紙は，固有値とその固有ベクトル，という組み合わせを全ての固有値について書け．

v) ${}^tO\,A\,O = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ となる実直交行列 O を求めよ．ただし，右辺は固有値の絶対値が大きい順に並ぶ ($|d_1| \geqq |d_2| \geqq |d_3|$) ように O を定めよ．答案用紙には行列 O だけを書け．

線形代数続論　期末試験　**略解**　　2013/01/30 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を除く，任意の 2 個の組み合わせ

【$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, とおくと，$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$】

ii) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に比例する $\vec{0}$ 以外のベクトル【$\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$.

別解．問題文の $\vec{0}$ 以外の 4 個のベクトルはそれぞれ 3 つの成分が $x = 2y - 3z = 5$ を満たすので，生成する空間は平面 $0 = x - 2y + 3z = (\vec{x}, \vec{c})$.】

iii) $\frac{29}{27}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{145}{27} \\ \frac{29}{27} \\ \frac{-29}{27} \end{pmatrix}$ 【$\dfrac{(\vec{a}, \vec{b})\,\vec{b}}{(\vec{b}, \vec{b})}$】

iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を除く，任意の 2 個の組み合わせ【問 i) と同じ】

問 2 (60).

i) $A = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \boxed{\frac{2}{3}} \\ \boxed{\frac{7}{6}} & \frac{2}{3} & \frac{19}{6} \end{pmatrix}$

ii) $\phi(t) = t^3 - 10\,t^2 + 31\,t - 30$

iii) 5, 3, 2

iv) 固有値 $d_1 = 5$ に対する規格化固有ベクトルは $\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 $d_2 = 3$ に対する規格化固有ベクトルは $\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 $d_3 = 2$ に対する規格化固有ベクトルは $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

v) $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 【各列毎にいっせいに符号を逆にしても可，列入替等不可】