慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 25 年 07 月 23 日 (火) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	線形代数	氏　名			

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問 1． $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ および，t, u, v, w, x, y を実定数として $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t & u & v \\ 0 & 1 & w & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ とおく．以下の量 i)，ii)，iii)，iv) を計算せよ．答案は計算結果だけでよい．

i)　行列式 $|A|$．　ii)　和の行列式 $|A+B|$．　iii)　積 AB．　iv)　逆行列 A^{-1}．

問 2． $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ および $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とし，$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて，x, y, z についての連立 1 次方程式 $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{k}$ を考える．以下の問いに答えよ．答案は答えだけでよい．

i) 行列式 $|A|$ を計算せよ．答案は答えだけでよい．

ii) A の第 1, 2, 3 列それぞれがなす列ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ とおくと，講義でのたとえでいう「引越荷物を小箱に分ける記号法」によって $A = (\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c})$ と書け，さらに，

$$A\overrightarrow{w} = \square\,\overrightarrow{a} + \square\,\overrightarrow{b} + \square\,\overrightarrow{c} \tag{1}$$

と，ベクトルの和とスカラー倍だけを用いた式で書ける．式 (1) の右辺の形の式を 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ の線形結合などと呼ぶ．空欄に適切な記号を入れて右辺を完成せよ．答案は式 (1) 全体を書け．

iii) $\overrightarrow{k} = A\overrightarrow{w}$ の右辺に式 (1) を代入した式を行列式 $\left|\overrightarrow{k}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right|$ （行列式 $|A|$ の 1 列目を $\overrightarrow{k}$ で置き換えた行列式）に代入して行列式の性質を用いると，未知数 x に対するクラメルの公式

$$x = \frac{\left|\ \square\ \right|}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}$$

を得る．**問 2** の冒頭の A と $\overrightarrow{k}$ の具体形を用い，空欄に 3 行 3 列に並んだ 9 個の数値を入れて右辺を完成せよ．答案は右辺の分子の行列式だけを書けばよい．

iv) 上の小問の比を計算して x を求めよ．答案は答えだけでよい．

v) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を行基本変形して，左の $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ の部分を単位行列に変形する方法で連立 1 次方程式 $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{k}$ の解 $\overrightarrow{w}$ を求めよ．答案用紙には

（解答例）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

のように，最後の答え $\overrightarrow{w}$ の他に，**最初の変形と最後の変形も記入すること**.

問 3．　次の『』内の文章は，ベクトルの組について，1 次独立か 1 次従属かに関わる記述である．空欄 (1)—(4) に入る適切な数値または語句を答えよ．(1) は 3 個のベクトル，(2) は A と $\overrightarrow{w}$ で書かれた式，(3) はベクトル，(4) は数値である．答案用紙には $\underline{(5)\ 5x+3y=1}$ のように答えのみを書け.

『ベクトルの組に対してその線形結合が $\overrightarrow{0}$ になるためには，各ベクトルのスカラー倍を全て 0 倍にする（自明な線形結合）しかないとき，そのベクトルの組は 1 次独立，自明でない線形結合があるとき 1 次従属という．たとえば，5 個の 3 次元ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ は 1 次従属だが，この中から選んだ 3 個のベクトル $\boxed{(1)\qquad\qquad}$ は 1 次独立である.

一般に 3 個の 3 次元列ベクトルを（たとえば (1) のように）選んだとき，これらを横に並べて作られる 3 次正方行列を A とおく．x, y, z を実数の変数として $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくとき，選んだ 3 個の列ベクトルが 1 次独立であることは $\overrightarrow{w}$ の方程式 $\boxed{(2)\qquad}$ の解が $\overrightarrow{w}=\boxed{(3)\quad}$ だけであることと同値である．さらにこのことは（今の場合のように A が正方行列の場合は），A の行列式が $\boxed{(4)\quad}$ でないことと同値である.』

線形代数　期末試験　**略解**　　2013/07/23 服部哲弥

問 1 (40=10*4).　【講義６（三角行列の行列式），講義２（行列の積），講義３（逆行列）】

i) $|A| = \underline{10}$.　　ii) $|A+B| = \frac{5}{2}\times 2\times 2\times\frac{26}{5} = \underline{52}$.

iii) $\underline{AB = \begin{pmatrix} 1 & 2t-2 & 2u-2w+1 & -2x+y+2v-1 \\ 0 & 1 & w-1 & x-y+1 \\ 0 & 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.　　iv) $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}$.

i) と ii) の三角行列の行列式は対角成分の積，iv) の逆行列は iii) の AB が単位行列になるときの B.

問 2 (40=5*4+20).　【講義８（クラメルの公式），１１（はき出し法）】

i) $|A| = \underline{-1}$　　ii) $\underline{A\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{b} + z\,\overrightarrow{c}}$　　iii) $\underline{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}$　　iv) $x = \frac{-5}{-1} = \underline{5}$

v) $\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\ \underline{\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

（変形は解答例であって，別解を許す.）

問 3 (20=5*4).　【講義１２（1 次独立，1 次従属）】

(1) たとえば $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$　（$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の任意の 3 個）

(2) $\underline{A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}}$　　(3) $\underline{\overrightarrow{0}}$　　(4) $\underline{0}$