慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 26 年 1 月 21 日 (火) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	線形代数続論	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問 1 ．　3 次元ベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ について以下の小問に答えよ．

i) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が 1 次従属になる 3 次元ベクトル $\overrightarrow{c}$ のうちで，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, および零ベクトル $\overrightarrow{0}$ **以外**のものを 1 つ答えよ．答案用紙は答だけを書け．

ii) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が生成する線形空間（$\mathbb{R}^3$ の部分空間）を W とおくとき，W の次元 $\dim W$ を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iii) W の $\mathbb{R}^3$ における直交補空間 $W^{\perp}$ の基底を 1 組求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iv) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, および，最初の小問で答えた $\overrightarrow{c}$ を並べた 3 次正方行列を $A = (\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c})$ とおく．A を係数行列とする同次 1 次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解空間を $V = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ とおくとき，$\dim V$ を求めよ．(なお，この小問は最初の小問が正解の場合のみ採点する．)

問 2 ．　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．以下の小問 i)– vi) に答えよ．

i) $\overrightarrow{a}$ を規格化して（ノルム $\|\overrightarrow{a}\|$ で割って）得られるベクトルを $\overrightarrow{u}_1$ とおく．$\overrightarrow{u}_1$ を計算せよ．答案用紙は答 $\overrightarrow{u}_1$ だけを書け．

ii) 小問 i) の $\overrightarrow{u}_1$ が生成する（$\mathbb{R}^3$ の中の）1 次元部分線形空間を W_1 とおく．$\overrightarrow{b}$ の W_1 への正射影を $\overrightarrow{b}$ から引いたベクトルを，さらに規格化して得られるベクトルを $\overrightarrow{u}_2$ とおく．$\overrightarrow{u}_2$ を計算せよ．答案用紙は答 $\overrightarrow{u}_2$ だけを書け．

iii) 小問 i) の $\overrightarrow{u}_1$ と小問 ii) の $\overrightarrow{u}_2$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の中の部分線形空間を W_2 とおく．$\overrightarrow{c}$ の W_2 への正射影を $\overrightarrow{c}$ から引いたベクトルを，さらに規格化して得られるベクトルを $\overrightarrow{u}_3$ とおく．$\overrightarrow{u}_3$ を計算せよ．答案用紙は答 $\overrightarrow{u}_3$ だけを書け．

iv) 小問 i)– iii) の $\overrightarrow{u}_i$ たちを横に並べた 3 次正方行列を $P = (\overrightarrow{u}_1\ \overrightarrow{u}_2\ \overrightarrow{u}_3)$ とおく．P の転置行列 ${}^tP$ と P の積 ${}^tP\,P$ はどういう行列になるはずかを答えよ．答案用紙は（言葉や変数を使わず）9 個の数を並べた正方行列だけを書け．

v) 実定数 a と b，および小問 iv) の P を用いて $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} {}^tP$ とおく．E を 3 次元単位行列として，A の固有多項式 $\phi(t) = |t\,E - A|$ を計算すると $\phi(t) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$ と書ける．α, β, γ を計算してそれぞれ a と b で表せ．答案用紙は答だけを書け．

vi) 小問 v) の A の，ある固有値に対する固有空間の次元が 3 になるとき，a と b を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

線形代数続論　期末試験　**略解**　　2014/01/21 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) 例：$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ など.（$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{0}$ 以外で，x, y, z が $z = x + y$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ はすべて正解.）

ii) $\dim W = 2$.【W を生成する $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ は 1 次独立なので W の基底.】

iii) 例：$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ など.（零ベクトル以外の $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に比例するベクトルはすべて正解.）

【$W^{\perp} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}) = 0\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid {}^t(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b})\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\} = \mathrm{Ker}\, {}^t(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b})$.】

iv) $\dim V = 1$.【$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, A = 3 - \mathrm{rank} A = 3 - 2$.】

問 2 (60=10*6).

i) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

iii) $\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 【シュミットの直交化を行ったベクトルを並べたから P は直交行列.】

v) $\alpha = a + b + 4$, $\beta = ab + 4a + 4b$, $\gamma = 4ab$ 【$\phi(t) = |P\,({}^t E - {}^t P\,A\,P)\,{}^t P|$
$= |P|\,|{}^t E - {}^t P\,A\,P|\,|{}^t P| = |P|\,(t-4)(t-a)(t-b)\,|{}^t P| = |{}^t P\,P|\,(t-4)(t-a)(t-b)$
$= t^3 - (a+b+4)t^2 + (ab+4a+4b)t - 4ab$.】

vi) $a = b = 4$