慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

平成 27 年 1 月 27 日 (火) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	線形代数続論	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答だけでよい．

問１．　c を定数として，$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -2 \\ c & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．

i) 5 が A の固有値の 1 つであることを意味する，文字変数として c だけを含む，c の方程式を求めよ．答案は c の方程式だけを書け．

ii) 5 が A の固有値の 1 つになるような c のとき，A の 5 以外の固有値を求めよ．答案は答だけを書け．

iii) 5 が A の固有値の 1 つになるような c のとき，A の 5 以外の固有値の規格化された固有ベクトルを求めよ．答案は答だけを書け．

iv) 5 が A の固有値の 1 つになるような c のとき，$P = \begin{pmatrix} \boxed{} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ が実対称行列 A を対角化する実直交行列になるように，すなわち，$A = P\,D\,{}^tP$ を満たす対角行列 D が存在するように，P の空欄を埋め，また，D を求めよ．答案は空欄に対応する列ベクトルと D だけを書け．

問２．　3 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の小問に答えよ．

i) B の固有値と対応する固有空間の次元を求めよ．（異なる固有値が複数ある場合はすべて求めよ．）答案用紙は答だけを書け．

ii) 前小問の固有空間（複数ある場合はそれぞれの基底をすべて並べたベクトルの組が生成する部分空間）の直交補空間の基底を 1 組求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iii) E を 3 次元単位行列として $C = B - 2E$ とおくとき，C が定義する線形写像 f_C の核 $\mathrm{Ker}\, f_C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid C\vec{x} = \vec{0}\}$ の基底を 1 組求めよ．答案用紙は答だけを書け．

問３．　2 列の行列について以下の小問に答えよ．

i) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおき，これらの列ベクトルを横に並べてできる 3×2 行列を $S = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおく．

(a) S を行標準変形で変形して階段行列を求めよ．答案用紙は階段行列だけを書け．

(b) S の転置行列 ${}^tS$ が定義する線形写像 $f_{{}^tS}$ の像 $\mathrm{Im}\, f_{{}^tS} = \{{}^tS\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組求めよ．答案用紙は答だけを書け．

(c) $p\overrightarrow{a_1} + q\overrightarrow{a_2} = 0$ かつ $(p,q) \neq (0,0)$ を満たす既約な整数の組 (p,q) を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

ii) $\overrightarrow{b_1}$ と $\overrightarrow{b_2}$ を 5 成分の列ベクトルとする．これらの列ベクトルを最初の小問のように横に並べてできる 5×2 行列を $T = (\overrightarrow{b_1}\ \overrightarrow{b_2})$ とおく．

T の転置行列 ${}^tT$ が定義する線形写像 $f_{{}^tT}$ の像 $\mathrm{Im}\, f_{{}^tT} = \{{}^tT\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^5\}$ の要素にならない 2 次元ベクトル（$\overrightarrow{y} \notin \mathrm{Im}\, f_{{}^tT}$ である $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2$）が存在する T を考える．

(a) $\overrightarrow{y} \notin \mathrm{Im}\, f_{{}^tT}$ である $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2$ が存在するとき，$\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$ は 1 次従属である．次の文がこの理由の説明になるように空欄を埋める（$f(x) = 3$ のように，文字式がある数値に等しいという形の）等式を答えよ．答案用紙は答だけを書け．

「もし $\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$ が 1 次独立ならば並べて得られる行列 T の rank は春学期の終わりと秋学期の始めに既習の値になる．このことと $\mathrm{rank}\, {}^tT = \mathrm{rank}\, T$ によって $\boxed{}$ となるから，任意の $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\overrightarrow{x}$ の連立 1 次方程式 ${}^tT\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ の係数行列 ${}^tT$ と拡大係数行列 $({}^tT\ y)$ について $\mathrm{rank}\, {}^tT \leqq \mathrm{rank}({}^tT\ y)$ であることと，行列の rank は行数を超えないこととを合わせると $\mathrm{rank}\, {}^tT = \mathrm{rank}({}^tT\ y)$ となり，春学期の連立 1 次方程式が解を持つ必要十分条件によって，${}^tT\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ は解 $\overrightarrow{x}$ を持つ．よって $\overrightarrow{y} \notin \mathrm{Im}\, f_{{}^tT}$ となることはなく，小問の前提に矛盾する．背理法により主張が証明された．」

(b) 次元 $\dim \mathrm{Im}\, f_{{}^tT}$ のとりうる値（最初に記した条件の下で T をいろいろ変えたときに得られるいろいろな次元の値）すべてを，それぞれ対応する T の例と組にして列挙せよ．答案用紙は答だけを

「（次元 9，$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$）および（次元 10，…」などのように書け．

線形代数続論　期末試験　**略解**　　2015/01/27 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $c^2-8c+16=0$ 　 $\left((c-4)^2=0, \begin{vmatrix} 4 & -c & 2 \\ -c & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\right.$, 等も可）

【$\varphi(5)=0;\ \varphi(t)=|tE-A|=(t-1)^2(t-4)+8c-8(t-1)-c^2(t-4)=0$】

ii) -4 　【$c=4$, $\varphi(t)=t^3-6t^2-15t+100=(t-5)^2(t+4)$】

iii) $\pm\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　（複号は一方で可だが，規格化されてなければ不可）

【$(A+4E)\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$】

iv) $\boxed{\begin{matrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{matrix}}$ 　（負も可）, 　$D=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 　【$A=P\,D\,{}^tP;\ P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$】

問 2 (30=10*3).

i) 固有値 2，固有空間の次元 1 　【 $B\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{u} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{u}\propto\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$】

ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ など（第 1 成分が 0 のベクトル 2 個であって 1 次独立な組, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 単独は不可なことに注意）

iii) $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$（ただし a は 0 以外）の形のベクトル 1 個の組

問 3 (30=15*2).

i) (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 　(b) $\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix}$（ただし a は 0 以外）の形のベクトル 1 個の組　(c) $(2,1)$ または $(-2,-1)$

ii) (a) $\mathrm{rank}\,{}^tT=2$ 　(b)（次元 0，$T=O$（零行列））および（次元 1，$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$）（後者は，零行列でなくて 2 つの列が 1 次従属なベクトルであれば可.）