

慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50分	分
平成 27 年 07 月 23 日（木）6 時限施行				学部	学科	年 組
担当者名	服部 哲弥 君			学籍番号		
科目名	線形代数			氏 名		
				採 点 欄		

注意： 解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問 1 . $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ および $B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -4 \\ 14 & 10 & 10 \\ -4 & 10 & 19 \end{pmatrix}$ とおく．以下の量 i), ii),

iii) を計算せよ（なお， tA は A の転置行列．）答えは計算結果だけを書け．

i) 積 tABA . ii) 逆行列 A^{-1} . iii) 行列式 $|B|$.

問 2 . ツル x 匹，カメ y 匹，タコ z 匹がいずれも 1 匹以上いて，頭の数合計 8，足の数は 46 である．但し，ツル，カメ，タコの頭数は 1，足の数はそれぞれ 2, 4, 8 とする．以上を数

式でそのまま表した $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の連立一次方程式を，いずれも要素（成分）が上記の数値だ

けで書ける行列 A と列ベクトル \vec{b} を用いて $A\vec{x} = \vec{b}$ と書くとき，以下の問いに答えよ．答えは答えだけを書け．

- 係数行列 A の rank を答えよ．
- A を行標準変形で変形して得る階段行列を答えよ（テキストにしたがって， A の階数に等しい個数の基本単位列ベクトルが現れる形まで変形した答えのみ採点の対象とする．）
- 上の小問に基づいて得る $A\vec{x} = \vec{b}$ の一般解 \vec{x} を， $z = a$ を任意定数として，
 $\vec{x} = a\vec{v} + \vec{w}$ （但し $z = a$ は任意）
 と，成分がすべて数値のベクトルたち \vec{v} と \vec{w} を用いて書くとき， \vec{v} を答えよ．
- ツル，カメ，タコはそれぞれ何匹ずついるか答えよ．

問 3 . 3×5 行列 A について，以下の問いに答えよ．答えは答えだけを書け．

- 行列 A の階数は A を変えるといろいろな値を取り得るが， A を 3×5 行列の範囲で変えるときに実際に現れる階数の数値をすべて答えよ．
- 自然数 n に対して n 次単位行列を E_n と書く． X が 5×3 行列ならば積 AX と XA はともに定義されるが，正方行列の逆行列の類似で $AX = E_3$ および $XA = E_5$ が両方成り立つ X があるか，という問題の次の『』内の答えの空欄 (a)(b) それぞれにもっとも適切な性質を，この用紙裏面の選択肢から選んで，答案用紙に写せ（なお選択肢はテキスト第 3 章で紹介されている定理を含む各種性質を並べたものである．また，空欄の大きさは実際の長さとは関係ない．）

『そのような X があるとする． X を行標準変形して階段行列にしたとき，

(a) から，その階段行列の最後の行はすべての成分が 0 である．これを，(b) と合わせると， PX の最後の行の成分が全て 0 で， $|P| \neq 0$ となる正方行列 P がある． $XA = E_5$ の左から P をかけると， P の最後の行の成分が全て 0 でなければならなくなるが，これは $|P| \neq 0$ に矛盾する．背理法によってそのような X はない』

選択肢

任意の行列は有限回の基本変形で階段行列にできる

階段行列は基本変形のしかたによらない

行列の階数は行数以下かつ列数以下である

行列とその転置行列の階数は等しい

元の行列に左からかけると階段行列に等しくなる正則行列がある

行基本変形を表す行列は具体的に書ける

正方行列では階段行列が単位行列であることと正則であることが同値である

問 1 (30=10*3) .

$$i) {}^tABA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad ii) A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} (= {}^tA).$$

$$iii) |B| = |AA^{-1}BA A^{-1}| = |A| |{}^tABA| |A^{-1}| = |{}^tABA| = \underline{-6}.$$

問 2 (40=10*4) .

$$i) \text{rank}A = \underline{2} \quad ii) A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad iii) \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \begin{pmatrix} 2a-7 \\ -3a+15 \\ a \end{pmatrix})$$

iv) ツル 1, カメ 3, タコ 4 (x, y, z がすべて正の整数になるのは $a = 4$ のときのみ)

問 3 (30=10*3) .

i) 0, 1, 2, 3ii) (a) 行列の階数は行数以下かつ列数以下である(b) 元の行列に左からかけると階段行列に等しくなる正則行列がある