慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	**50**分	分
平成28年1月26日(火)　時限施行		学部　　学科　　年　　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	線形代数続論	氏　名			

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答だけでよい．

問１．　実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2\sqrt{2} \\ -4 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ を実直交行列 $P = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で対角化すると $D = \begin{pmatrix} \boxed{} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{} \end{pmatrix}$ を得るように，すなわち等式 $P^{-1}AP = D$ が成り立つように，空欄を埋めよ．答案用紙には答だけを，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ のように，P は空欄だけでなく全ての成分を書き，D は対角成分全てを対角行列の略記法に従って書け.（答えが複数可能な場合は１組を選んで書け.）

問２．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ について，A を係数行列とする同次１次方程式の解の集合 $\mathrm{Ker}\, A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ を考える．春学期にははき出し法に基づいて自由変数を用いて $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解を書いたが，これを秋の線形空間の方法で見直すために，A の転置行列 ${}^tA$ の２つの列を $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．すなわち ${}^tA = (\overrightarrow{p}\ \ \overrightarrow{q})$．以下の小問に答えよ．答案用紙は答だけを書け.

i) $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ を**規格化**（ノルムが１になるようにスカラー倍）したベクトルのうち**第１成分が正**のものをそれぞれ $\overrightarrow{u_1}$ と $\overrightarrow{u_2}$ とおく．$\overrightarrow{u_1}$ と $\overrightarrow{u_2}$ を成分で $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ のように表せ.

ii) ベクトル $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ からシュミットの直交化によって $\overrightarrow{u_1}$ と $\overrightarrow{u_2}$ に直交するベクトルを得て，さらにそれを**規格化**したベクトルのうち**第１成分が正**のものを $\overrightarrow{u_3}$ とおく．$\overrightarrow{u_3}$ を前小問と同様に成分で表せ.

iii) ３つのベクトル $\overrightarrow{u_i}$, $i = 1, 2, 3,$ に直交する**規格化**されたベクトルで**第１成分が正**のものを $\overrightarrow{u_4}$

とおく．$\overrightarrow{u_4}$ を前小問と同様に成分で表せ．

iv) 次の同値変形は集合についての等式 $\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Im}\,{}^tA)^{\perp}$ の証明である．ここで，$\mathrm{Im}\,{}^tA = \{{}^tA\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2\}$ は ${}^tA$ が定義する線形写像の像空間であり，${}^{\perp}$ は線形空間の直交補空間を表す．空欄に当てはまるベクトルを以下に現れる記号だけを用いて表せ．なお，$\in$ は集合の要素であることを表し，$(\ ,\ )$ はベクトルの内積を表し，$P \Leftrightarrow Q$ は主張 P と Q が同値であることを表す．

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,A \\
\Leftrightarrow\ & A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \text{すべての } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ に対して } (\boxed{}, \overrightarrow{x}) = {}^t\overrightarrow{y}A\overrightarrow{x} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{すべての } \overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\,{}^tA \text{ に対して } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{x} \in (\mathrm{Im}\,{}^tA)^{\perp}
\end{aligned}
$$

v) 以上を合わせると，最初の目的であった $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解 $\overrightarrow{x}$ は，$\overrightarrow{u_i}, i = 1, 2, 3, 4,$ のうちの適切な組と，自由変数 $a, b, c, \ldots$ を適切な個数用いて，春学期の解の表記と同様に $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{u_*} + \cdots$ の形に書けることがわかる．この表示を求めよ．

問 1 (40).　$\underline{P = \begin{pmatrix} \boxed{\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}} & \boxed{\dfrac{1}{2}} & \boxed{\dfrac{1}{2}} \\ \boxed{\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}} & \boxed{\dfrac{1}{2}} & \boxed{\dfrac{1}{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$, $\underline{D = \begin{pmatrix} \boxed{7} & & \\ & 3 & \\ & & \boxed{\text{-5}} \end{pmatrix}}$ （複号同順，いずれか一方の組）

問 2 (60=10*6).

i) $\underline{\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$, $\underline{\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$

ii) $\underline{\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$ （$\overrightarrow{r} - (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{u_1})\,\overrightarrow{u_1} - (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{u_2})\,\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$）

iii) $\underline{\overrightarrow{u_4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

iv) $\underline{{}^t A\,\overrightarrow{y}}$

v) $\underline{\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{u_3} + b\overrightarrow{u_4}}$　　（$\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Im}\,{}^t A)^{\perp} = \langle \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4} \rangle$）