# 工学部　数学基礎３　服部担当　期末試験

## １月２７日木曜日，通常の講義時間 (3 限，13:00-14:30) に通常の講義室 (14) で，期末試験を行う．持ち込み禁止．

試験範囲は講義の範囲全部を原則とするが，特に，極値問題と陰関数定理を中心に問う．より詳しい情報を講義中に指示する可能性がある.（自明のことだが，講義欠席による不利益は欠席者が負う．講義を欠席した場合は各自情報収集・交換に努めること.）

中間試験と期末試験の得点の科目成績への効果は，前期（数学基礎１）服部担当で掲示した計算式の類推を用いる．即ち，

(i) 期末試験を主とし中間試験を副とする．特に，中間試験が満点でも期末試験が著しく悪い場合は不合格となることがある．

(ii) 中間試験は期末試験における悪い成績を救う．逆に，中間試験が著しく悪い場合は期末試験で素点で合格点に達していないと合格が難しくなる．

(iii) 良い成績は中間・期末を問わず良い点数を取る者に与えることを原則とする．

公平感を損なわないため，レポート等を含む試験後の情状酌量の申し出は受け付けない．規約に基づく追試験については単位取得最低点を成績の上限とする.（バックアップという本来の趣旨と，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため.）

間違った採点の訂正は行うので疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する間違った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

以上の試験問題の予想や成績算出方法の予定は，諸君の勉強の便宜のために発表した．裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで講義の範囲全部である．

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

# 数学基礎３　期末テスト

2000/01/27 服部哲弥

**問 1** $(10+10+20+10)$**.**　　２変数関数 $f:\ \mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ を

$$f(x,y)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+x^3+x^2y+\frac{26}{27}y^3$$

で定義する．極値問題に関する定理を用いることにより，以下の問に答えよ．

(i) $f$ の１階偏導関数 $f_x(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f_y(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(ii) $f$ の $x$ についての２階偏導関数 $f_{xx}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ と，極値問題における判別式

$$D=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right)^2$$

を求めよ.（$D$ の答の式は展開する必要はない.）

(iii) $f$ の極値を与える点を全て求めよ．極大か極小かも答えよ．

(iv) $f(x,y)$ は戦国時代のある村周辺の地形を次の意味で表す：$x$ 軸正方向が東，$y$ 軸正方向が北，に対応し，原点 $(0,0)$ の近く（詳細は無関係だが原点を中心とする半径 1/2 の円内）で， $f(x,y)$ は地点 $(x,y)$ における標高（地面の高さ）である．但し，地図の縮尺の関係で数値の単位は通常のキロメートル等ではない．村は盆地の谷底にあり，村を守る城は丘（山）の頂上にある．あるとき， 南のほうの集団がこの村に攻め込むという極秘情報がもたらされた．その情報によると，敵は城を避け，地形上いちばん通りやすい所を通って素早く村に攻め込む．敵を村の前で待ちかまえるにはどの地点をねらって待ち伏せるのが良いか， $(x,y)$ の座標で答えよ． なお，情報が漏れたことは敵に知られていないので，裏をかかれる心配はないものとする．

**問 2** $(10*4)$**.**

(i) 関数 $f:\ \mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=(x+1)(x^2+x+2)-y^2-y^4$ で定義するとき，$f(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ を求めよ．

(ii) $f$ の定める陰関数 ($f(x,\phi(x))=0$ が $x$ の恒等式となる１変数関数）$\phi$ のうち $(x,y)=(0,1)$ を通り連続なものについて， $x=0$ における微分係数 $\phi'(0)$ を求めよ．

(iii) 曲線 $y=\phi(x)$ が通る点のうち微分係数 $\phi'(x)$ が存在しない（無限大になる）可能性のある点はどこか． $(x,y)$ の形で答えよ．

(iv) 以上を手がかりにして（および可能ならば自分で他にも調べて） $y=\phi(x)$ のグラフの概形を予想して書け.

**問 3** $(10)$**.**　　以下のいずれか該当するほうに答えよ．

(i) **講義に半分より多く出席した諸君．**　講義（教官）を「採点」せよ．即ち，良かったと思う点と（教官が）改善すべきだと思う点を各１つ以上挙げよ．

(ii) **講義のうち半分以下しか出席しなかった諸君．**　出席の少なかった理由と，試験のためにどのように勉強したかを答えよ．

（半分くらい出席の場合は (ii) を選ぶこと.）

数学基礎３　期末テスト　**略解**　　　　2000/01/28 服部哲弥

**問１** $(10+10+20+10)$**.**　　$f(x,y)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+x^3+x^2y+\frac{26}{27}y^3$ について.

(i) $f$ の１階偏導関数 を求めよ.

**答.** $f_x(x,y)=-x+3x^2+2xy$, $f_y(x,y)=-y+x^2+\frac{26}{9}y^2$.

(ii) $f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ と $D=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ を求めよ.

**答.** $f_{xx}(x,y)=-1+6x+2y$, $f_{xy}(x,y)=2x$, $f_{yy}(x,y)=-1+\frac{52}{9}y$, より，答は
$f_{xx}(x,y)=-1+6x+2y$,
$D=(6x+2y-1)(52y/9-1)-4x^2=1-70y/9+104y^2/9-6x+104xy/3-4x^2$.

(iii) $f$ の極値を与える点を全て求めよ．極大か極小かも答えよ.

**答.** $f_x(x,y)=0$ を解くと，$x=0$ または $3x+2y-1=0$ となる．前者のとき $f_y(x,y)=0$ より $y=0$ または $y=\frac{9}{26}$，後者のとき $30y^2-13y+1=0$ から $y=\frac{1}{3}$ または $y=\frac{1}{10}$ となって，それぞれ $x=\frac{1}{9}$ と $x=\frac{4}{15}$ となる．結局極値の候補は $(0,0)$, $(0,9/26)$, $(1/9,1/3)$, $(4/15,1/10)$ の４点．各々について $D$ を計算するとそれぞれ $1>0$, $-4/13<0$, $7/27>0$, $-28/45<0$ となるので，極値をとるのは $(0,0)$ と $(1/9,1/3)$ である．$f_{xx}(x,y)$ はそれぞれ $-1<0$, $1/3>0$ なので，答は，$(0,0)$ で極大値，$(1/9,1/3)$ で極小値.

(iv) 南のほうの集団が城を避け，地形上いちばん通りやすい所を通って素早く村に攻め込む．敵を村の前で待ちかまえるにはどの地点をねらって待ち伏せるのが良いか.

**答.** 地形の概略を考える（図は略）と，原点に山があって，第１象限 $(1/9,1/3)$ 東北東方向に谷底がある．原点からほぼ東と北の $(0,9/26)$, $(4/15,1/10)$ に峠点があることから，山からほぼ東と北の方向に峰が続いている．南のほうから攻め込んでくるとすると，山の東にある峠 $(4/15,1/10)$ を越えてくるであろうからここを待ち伏せの目標とすべきである.

**問２** $(10*4)$**.**

(i) $f(x,y)=(x+1)(x^2+x+2)-y^2-y^4$ について $f(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ を求めよ.

**答.** 順に $0$, $3$, $-6$.

(ii) $f$ の定める陰関数 $\phi$ のうち $(x,y)=(0,1)$ を通り連続なものについて，$\phi'(0)$ を求めよ.

**答.** 陰関数定理より $\phi'(x)=-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))/\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))=\frac{3x^2+4x+3}{2\phi(x)+4\phi(x)^3}$ となるので，$\phi(0)=1$ と合わせると $\phi'(0)=1/2$.

(iii) 曲線 $y=\phi(x)$ が通る点のうち微分係数 $\phi'(x)$ が存在しない可能性のある点はどこか.

**答.** $f_y(x,y)\neq 0$ ならば陰関数定理より $\phi'(x)$ が存在するから，可能性があるのは $f_y(x,y)=-2y-4y^3=0$ となるときだけである．これを解くと $y=0$ となり，$f(x,y)=0$ に代入すると $x=-1$ を得るから，可能性があるのは $(-1,0)$ だけである.

(iv) $y=\phi(x)$ のグラフの概形を予想して書け.

**答.**（図は略）．$(-1,0)$ から始まって単調増加する関数で，$x=-1$ の付近で $\phi(x)\approx\sqrt{2(1+x)}$ のように振る舞い，$(0,1)$ を通ってそこでの傾きが $1/2$，$x$ の大きいところでは $y\approx x^{3/4}$ のように振る舞う.

**問３** $(10)$**.**　　都合により解答例を省略する.