数学基礎１中間試験．
2112317・火曜３限・工学部１年・服部担当

2000/05/22

６月６日通常の講義時間に通常の講義室にて中間試験を行う.

持ち込みなし.

範囲は極限と関数の連続性（講義ノート §1 から §3）．講義中に配布した「過去問」は範囲・レベル・出題様式等に関する雰囲気を伝えるためのもので，今回の出題とは異なる．詳しい内容は講義中に説明するかもしれないので，出席（または友人間の連絡）を確実にすること．

この講義は必修科目であり，毎回の出席は当然とみなされている．文書によって証明できる理由（事故，病気）でない限り，欠席の救済は行わない．受け損なわないよう注意すること．過年度生の重複履修に関しては事前に相談すること．その他，事前に予測可能な障害について事後の相談は認めない．

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

数学基礎１　中間テスト

2000/06/06
中尾充宏，服部哲弥

問１

　次の２つの数列 $\{a_n\}$ それぞれについて，その上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

　さらに、それらの結果から、 $\{a_n\}$ が収束するかどうか判定せよ。

（１） $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

（２） $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

問２

　関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

とする。

（１） f は $x = 1$ で連続か否か。理由を付けて答えよ。

（２） f は $x = 1$ 以外の点では連続か否か。 理由を付けて答えよ。

数学基礎１　中間テスト　**解答例**

2000/06/07 服部哲弥

問１ (1) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ **および (2)** $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **について** $\limsup_{n\to\infty} a_n$ **と** $\liminf_{n\to\infty} a_n$ **を求めよ。さらに** $\{a_n\}$ **が収束するかどうか判定せよ。**

定義から

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_N \sup_{n\geq N} a_n\,,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_N \inf_{n\geq N} a_n\,.$$

(1) $(1-\dfrac{1}{2^n}) \leq 1$ かつ，$b<1$ ならば（ n を十分大きくすると）$(1-\dfrac{1}{2^n}) > b$ となる[1]（この数列は単調増加なので N がいくつであっても以上の結論は成り立つ）から，定義より

$$\sup_{n\geq N}(1-\frac{1}{2^n}) = 1\,.$$

これは N によらないから，その下限も 1 である．

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_N \sup_{n\geq N} a_n = \inf_N 1 = 1\,.$$

この数列は単調増加なので，$n \geq N$ では $a_n \geq a_N$．よって $\inf_{n\geq N} a_n = a_N$．$\sup_N a_N = \sup_n a_n = \sup_{n\geq 1} a_n$ は上で求めたとおり 1 である．よって，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_N \inf_{n\geq N} a_n = \sup_N a_N = 1\,.$$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 = \liminf_{n\to\infty} a_n$ なので a_n は収束し，極限は 1 である．

(2) 最初に

$$\sup_{n\geq N} a_n = \begin{cases} a_N\,, & N \text{ が偶数のとき}, \\ a_{N+1}\,, & N \text{ が奇数のとき}, \end{cases}$$

を示す．奇数次の項は負，偶数次の項は正なので，上限は偶数次の項の中にある．偶数次だけ見ると，n とともに減少しているので，上限は最初のほうの項である．$n \geq N$ では N 以上の最初の偶数番目の項が求めるものである．よって主張は示された．

$b_N = \sup_{n\geq N} a_n$ の下限を求める．b_N は a_n の偶数次の項からなるが， n が偶数ならば $a_n \geq 1$ である．他方，n を十分大きくすると a_n の偶数次の項は $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ なので，(1) と同様 1 に近づく．つまり， $b<1$ ならばいつかは $a_n > b$ となる．よって，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_N b_N = 1\,.$$

$\inf_{n\geq N} a_n$ についても同様に考えると，奇数次の（負の）項のみ考えればよい．負の項だけ見ると増加しているから，下限は最初のほうの項．よって

$$\inf_{n\geq N} a_n = \begin{cases} a_N\,, & N \text{ が奇数のとき}, \\ a_{N+1}\,, & N \text{ が偶数のとき}. \end{cases}$$

[1] 詳しく言うと，アルキメデスの原理．

$c_N = \sup_{n \geq N} a_n$ の上限は，上と同様に考えると，-1 になることが分かる．よって，

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \inf_N c_N = -1\,.$$

$\limsup_{n \to \infty} a_n = 1 \neq -1 = \liminf_{n \to \infty} a_n$ なので a_n は収束しない．

問 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

について，(1) f は $x = 1$ で連続か否か，(2) f は $x = 1$ 以外の点では連続か否か．

与えられた式を整理すると $x \neq 1$ のとき $f(x) = 1 + x$ となる．但し，この式は $x \neq 1$ でのみ成り立っている（そのように f を定義した）ことに注意．もし，$x = 1$ でもこの式のまま，つまり $f(1) = 1 + 1 = 2$ **だったならば**，f は多項式だから連続関数，つまり，どんな x に対しても連続である．しかし，**実際は** $f(1) = 1$ と定義したから 2 ではない．よって $x = 1$ では不連続，その他の点では連続．