数学基礎１　期末試験について
工学部　火曜３限　担当：服部哲弥

2000/07/11

別途公式の発表に従って期末試験期間中に期末試験を行う．持ち込みなし．

（9/12(火曜)13:00–14:30 4E 教室と聞いているが，正確には別途公式発表参照.）

試験範囲は中間試験以降の講義の範囲全部を原則とするが，特に，以下が予想される．

(i) 教科書の問題（問題 2.1(p.31)，問題 3.1(p.61)，問題 3.2(p.66)，問題 3.3(p.72)）から．
(ii) ロピタルの定理を用いた極限の計算.
(iii) 逆関数の微分係数や導関数の計算.

より詳しい情報を講義中に指示・示唆した.（自明のことだが，講義欠席による不利益は欠席者が負う．講義を欠席した場合は各自情報収集・交換に努めること.）

成績は期末試験を主とする.（期末試験を受けることが単位取得の**必要条件**である（十分条件ではないが）.）予期せぬ障害が起きない限り，これに中間試験等を加味する．

公平感を損なわないため，レポート等を含む試験後の情状酌量の申し出は受け付けない．規約に基づく追試験については単位取得最低点を成績の上限とする.（バックアップという本来の趣旨と，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため.）

間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない.

以上の試験問題の予想や成績算出方法の予定は，諸君の勉強の便宜のために発表した．**裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって予告なしに変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで中間試験以降の講義の範囲全部である．**

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

数学基礎I　期末テスト

2000/09/12 服部哲弥

問１．

(i) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\log(\log x)$　　(b) $\arcsin(x^3+1)$

(ii) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

(iii) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$　　(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

問２．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x)$ を求めよ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を求めよ．議論の過程も簡単に示すこと．

問３．　$f(x)=\tan x$　$(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$ の逆関数 $f^{-1}(x)=\arctan x$ について以下に答えよ．議論の過程も示すこと．

(i) 1 次の導関数 $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x)=\arctan' x$ を求めよ．

(ii) 2 次の導関数 $\dfrac{d^2f^{-1}}{dx^2}(x)=\arctan'' x$ を求めよ．

(iii) $x=0$ における n 次の微分係数 $\arctan^{(n)}(0)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ．

問４．　以下のいずれか該当するほうに答えよ．

(i) **講義に半分より多く出席した諸君．**　講義（教官）を「採点」せよ．即ち，良かったと思う点と（教官が）改善すべきだと思う点をそれぞれ１つ以上挙げよ．

(ii) **講義のうち半分以下しか出席しなかった諸君．**　出席の少なかった理由と，試験のためにどのように勉強したかを答えよ．

（半分くらい出席の場合は (ii) を選ぶこと.）

数学基礎 I　期末テスト　**略解**　　　　2000/09/13 服部哲弥

問 1 $(5*6=30)$**.**

(i)(a) $\dfrac{d}{dx}\log(\log x) = \dfrac{1}{x\log x}$.

(b) $\dfrac{d}{dx}\arcsin(x^3+1) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$.

注： arcsin の定義域，即ち sin の値域[1]，が $[-1,1]$ だから， $x \le 0$ となる．分母分子から x を約分するならば注意を要するが，採点にはこの符号の正誤は含めない．(約分を行わない諸君とのバランスから.）

(ii)(a) $\displaystyle\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$.

(b) $\dfrac{d}{dx}\log\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}-1)\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ だから $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \log\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} = \log\frac{1}{x}(x+2-2\sqrt{x+1})$.

(iii)(a) $x^2=y$ と変数変換すれば， $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}dy = \frac{1}{2}$.

(b) $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ と変数変換すれば， $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\ \cos^2\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$.

注：他にも種々の変数変換が可能である．実際，講義で言及した殆ど全ての方法が可能で，解答も多岐にわたった． $\sqrt{x^2-1}=t-x$, $t=\sqrt{x^2-1}$, $x=t^{-1}$, $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $x=1/\sin\theta$, など．唯一やってはいけないのは， $x=\cos\theta$ や $x=\sin\theta$．なぜなら積分範囲は x が大きくなるが右辺は 1 以下しかとれない！

問 2 $(10+20=30)$**.**

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log(1+x)$ **を求めよ．** ロピタルの定理より， $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to0}\frac{1}{1+x} = 1$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **を求めよ．** 指数関数 $\exp x$ の連続性より

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp(x\log(1+\frac{1}{x}))\\ &= \lim_{y\to0}\exp(\frac{1}{y}\log(1+y)) = \exp(\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\log(1+y)) = \exp(1) = e.\end{aligned}$$

注：指数関数の連続性への言及を問題にしている．

問 3 $(10*3=30)$**.**

(i) $f^{-1}(x)=\arctan x$ **について，** $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x)=\arctan' x$ **を求めよ．**

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}(f^{-1}(x)) = \cos^2(f^{-1}(x)).$$

$y=f^{-1}(x)=\arctan x$ とおくと $x=\tan y$ だから

$$\cos^2(f^{-1}(x)) = \cos^2(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

[1] 20001112 落合啓之さん (九州大学) の指摘により訂正.

よって $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(ii) $\dfrac{d^2f^{-1}}{dx^2}(x)=\arctan'' x$ **を求めよ．** $\arctan' x$ の結果を微分すれば $\dfrac{d^2f^{-1}}{dx^2}(x)=-2\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

(iii) $x=0$ **における** n **次微分係数** $\arctan^{(n)}(0)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ **を求めよ．** $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x)$ のマクローリン展開は $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ だから $\arctan x=f^{-1}(x)=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots$. これが $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\arctan^{(n)}(0)x^n$ に等しいから，

$$\arctan^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=0,2,4,\cdots,\\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)!, & n=1,3,5,7,\cdots.\end{cases}$$

注：高階微分を直接求める代わりにマクローリン展開を別の方向から求める解法になっているが，この方法は講義中に説明した.

問 4 (20)**．** 都合により解答例を省略する.