

数学基礎 III 第 1 回試験について

工学部 火曜 4 限 担当：服部哲弥

2000/11/28

12/12 (火曜) 通常の講義時間内 14:45–16:15 に通常の講義室 4C で第 1 回試験を行う。持ち込みなし。

机一つにつき 2 人以内で、机の中央の席は使わず端に着席すること。

試験範囲は偏微分の始めから極値問題までに関する講義範囲および教科書の問題全部、を原則とするが、特に、以下が予想される。

- (i) 教科書の節末問題 (4.1, 4.2, 4.3) またはそれをわずかに変えたもの
- (ii) 連続性, 偏微分可能性, 全微分可能性の基礎知識を問う問題
- (iii) 極値問題

より詳しい情報を講義中に指示・示唆した (自明のことだが, 講義欠席による不利益は欠席者が負う。講義を欠席した場合は各自情報収集に努めること。)

なお, 以上の予想は諸君の勉強の便宜のために発表した。裏をかくつもりはないが, 不慮の事態によって予告なしに変更があり得る。正式の試験範囲は, あくまで当該の講義と教科書の範囲全部である。

公平感を損なわないため, レポートや救済目的試験などの試験後の情状酌量の申し出は受け付けない。不可抗力による試験欠席の場合は, 文書による証明を服部まで提出すること。このとき, 何らかの対処が妥当と判断される場合でも, 無理を押しして正規の時間に受験する諸君との公平のため, 単位取得最低点に相当する点を上限とする。

間違った採点の訂正は行うので, 疑問のある場合は問い合わせさせていただきたい。但し, ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない。

問い合わせ先: hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

数学基礎 III 第 1 回試験

2000/12/12 服部哲弥

問 1 . 問 2 , 問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ .

問 1 (20 * 2 = 40) .

- (i) 2 変数関数 $f(x, y) = x \sin xy$ の 2 階の偏導関数を全て求めよ .
- (ii) ラプラシアンと呼ばれる微分作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を 2 変数関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + x^2$ に作用させたもの , 即ち , $\Delta f(x, y)$ を計算せよ . 但し $(x, y) \neq (0, 0)$ とする .

問 2 (5 * 6 = 30) . 次の (a) - (f) のそれぞれの性質について , その性質を持つ関数 $f(x, y)$ の例を下記選択肢から選んで書け . 解答は (a) x^2 , (b) $\sin xy$, \dots , のように記し , 当てはまる例が下記にない性質には (g) なし , のように記入せよ .

- (a) $(0, 0)$ で連続だが , x 偏微分不可能または y 偏微分不可能 .
- (b) $(0, 0)$ で x 偏微分可能かつ y 偏微分可能だが , 不連続 .
- (c) $(0, 0)$ で全微分可能だが , x 偏微分不可能または y 偏微分不可能 .
- (d) $(0, 0)$ で全微分可能だが , 不連続 .
- (e) $(0, 0)$ で連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能だが , 全微分不可能 .
- (f) $(0, 0)$ で連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能かつ全微分可能 .

選択肢

$$f(x, y) = |xy|, \quad f(x, y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{x}{|x| + h}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ かつ } y > 0, \\ 0, & x \leq 0 \text{ または } y \leq 0, \end{cases}$$
$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}, \quad f(x, y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{x\sqrt{|x|}}{|x| + h}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y > 0 \text{ かつ } x - y > 0, \\ 0, & x + y \leq 0 \text{ または } x - y \leq 0. \end{cases}$$

問 3 (10 * 4 = 40) . a, b, c を正の実数定数とし , $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cy^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ を第 1 象限 $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ で考える . 以下に答えよ . 但し , 関数 f の x 偏導関数と y 偏導関数をそれぞれ f_x, f_y と書く .

- (i) D において $f_y(x, y) = 0$ を満たす点の x 座標は $0 < x < \frac{1}{2c}$ を満たすことを証明せよ .
- (ii) $a = 1, b = 2\sqrt{2}, c = 2$ のときに D において $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点を全て求めよ .
- (iii) 上で求めた点は , 極大値 , 極小値 , 峠点のいずれであるか ?
- (iv) 一般に a, b, c が正の実数定数のときに D において $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点は全部でいくつあるか ?

問 1 (20 * 2 = 40) .

(i) 2 変数関数 $f(x, y) = x \sin xy$ の 2 階の偏導関数を全て求めよ .

$$f_{xx}(x, y) = 2y \cos xy - xy^2 \sin xy, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy, \\ f_{yy}(x, y) = -x^3 \sin xy .$$

(ii) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を 2 変数関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + x^2$ に作用させたもの, 即ち, $\Delta f(x, y)$ を計算せよ . 但し $(x, y) \neq (0, 0)$ とする .

$$\Delta \log(x^2 + y^2) = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \text{ だから } \Delta f(x, y) = 2 .$$

問 2 (5 * 6 = 30) . (0, 0) で :

(a) 連続だが, x 偏微分不可能または y 偏微分不可能

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{x\sqrt{|x|}}{|x| + h}$$

(b) x 偏微分可能かつ y 偏微分可能だが, 不連続

$$\begin{cases} 1, & x > 0 \text{ かつ } y > 0 \\ 0, & x \leq 0 \text{ または } y \leq 0 \end{cases}$$

(c) 全微分可能だが, x 偏微分不可能または y 偏微分不可能

なし

(d) 全微分可能だが, 不連続

なし

(e) 連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能だが, 全微分不可能

$$\sqrt{|xy|}$$

(f) 連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能かつ全微分可能

$$|xy|$$

(c)(d) は講義でやった定理からありえない . 他方, f_x, f_y が (存在して) 連続ならば全微分可能という定理を間違えた人多し . f_x, f_y が存在して f が連続というだけではだめ . また, $|xy|$ は多項式ではない (1 変数関数 $|x|$ は多項式ではない) . $\frac{\partial |xy|}{\partial x} = |y|$ とした人がかなりいたが, 間違い . この問題は (結果から見てうまい問題だったようだが), そこを間違えても結果的に正解に到達する点だけが悪い (もうけた人が数名いる) .

問 3 (10 * 4 = 40) . a, b, c を正の実数定数とし, $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ を第 1 象限 $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ で考える .

(i) D において $f_y(x, y) = 0$ を満たす点の x 座標は $0 < x < \frac{1}{2c}$ を満たすことを証明せよ .

$$f_y(x, y) = bx^2 + 2cxy - y = 0 \text{ となる . すなわち } bx^2/y = 1 - 2cx \text{ となるが, 仮定から左辺は正だから } 1 - 2cx > 0 \text{ でなければならない .}$$

(ii) $a = 1, b = 2\sqrt{2}, c = 2$ のときに D において $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点を全て求めよ .

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 - x, f_y(x, y) = 2\sqrt{2}x^2 + 4xy - y \text{ だから } f_x = f_y = 0 \text{ から } y \text{ を消去すると } 24x^2 - 11x + 1 = 0 . 0 < x < \frac{1}{2c} = \frac{1}{4} \text{ を満たすのは } x = \frac{1}{8} . \text{ このとき } y = \frac{\sqrt{2}}{16} .$$

(iii) $(x, y) = (\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{2}}{16})$ において $f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = -\frac{5}{4} < 0$ となるからこの点は峠点である .

(iv) $0 < x < \frac{1}{2c}$ で探せばよい . $f_y(x, y) = 0$ から $y = y(x) = \frac{bx^2}{1 - 2cx}$ となる . $f_x(x, y(x)) =$

$$3ax^2 + 2bxy(x) + cy(x)^2 - x = x \left(3ax + \frac{2b^2x^2}{1 - 2cx} + \frac{b^2cx^3}{(1 - 2cx)^2} - 1 \right) \text{ の括弧内は増加関数で}$$

$x = 0$ で -1 , かつ $x \uparrow \frac{1}{2c}$ のとき ∞ だから途中のただ一点で 0 になる . よって求める点は a, b, c の値に関係なく 1 つ .

なお, 問題と関係ないが, この問題の背景については私のホームページの, 雑記帳の中の「求む正しくてよい定理」を参照 .