数学基礎III　第２回(最終)試験について
工学部　火曜４限　担当：服部哲弥

2001/ 1/ 9

1/23 (火曜) 通常の講義時間内 14:45–16:15 に通常の講義室 4C で第２回試験を行う．持ち込みなし．

机一つにつき２人以内で，机の中央の席は使わず端に着席すること．
最終試験なので必ず受験すること．

試験範囲は偏微分の陰関数定理と重積分についての，講義範囲および教科書の問題全部，を原則とするが，特に，以下が予想される．

(i) 陰関数定理に関する応用問題（過去問の類問の他に小問を追加）．
(ii) 教科書（５．重積分）の例題，節末問題等，または，講義中に例として実際に計算してみせたもの，またはそれらをわずかに変えたもの．

より詳しい情報を講義中に指示・示唆した．(自明のことだが，講義欠席による不利益は欠席者が負う．講義を欠席した場合は各自情報収集に努めること．)
なお，以上の予想は諸君の勉強の便宜のために発表した．裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって予告なしに変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで当該の講義と教科書の範囲全部である．

成績は，第１回 (中間) 試験と第２回 (期末) 試験を主にする．両者の比重はほぼ対等と考える．二つの試験の取り扱いは，悪い成績を救う，良い成績はいつも良い点数を取る者に与えるべきである，公平感を損なわない，という考えに沿う．
ただし，これまでの経験に照らして，以上を確定とはせず，成績はすべての試験採点終了後に決定する．
公平感を損なわないため，レポートや救済目的試験などの試験後の情状酌量の申し出は受け付けない．不可抗力による試験欠席の場合は，文書による証明を服部まで提出すること．このとき，何らかの対処が妥当と判断される場合でも，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため，単位取得最低点に相当する点を上限とする．
間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

数学基礎III　第２回試験

問１，問２，問３ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2001/ 1/23 服部哲弥

問１ $(10*5=50)$．　以下の (a)–(e) の積分を講義の範囲の方法で計算せよ．それぞれについて，下記語群のいずれかの方法を用いた場合は，それを用いて変形した行の右余白等にその語を書き込むこと．(変数変換の場合は変換の具体形も書くこと.）語群は何度も使うものもあるし，語群の適用がない問もある． 語群：　積分順序の交換　重積分の変数変換

(a) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2} y\sin xy\,dx\right)dy$　(b) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right)dy$　(c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(d) 重積分 $\displaystyle\int_D (x-y)e^{x+y}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid 0\le x+y\le 2,\ 0\le x-y\le 2\}$

(e) 線積分 $\displaystyle\int_C x^2\,dx+2xy\,dy$, C: $(1,1)$ から $(-1,3)$ へ直線で結んだもの

問２ $(10*5=50)$．　３つの曲線 (直線) x 軸 $(y=0)$，$y=x^2$，$x=1$ で囲まれた 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid 0\le y\le x^2,\ 0<x\le 1\}$ の上で $w(x,y)=x^3+x^4+9x^4y+8xy^3-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2$ で定義される２変数実数値関数 w を考える．以下に答えよ．なお，２変数関数の x および y 偏導関数をそれぞれ w_x , w_y のように添字で表す.

(i) w の１階偏導関数を $f(x,y)=w_x(x,y)$ および $g(x,y)=w_y(x,y)$ とおくとき，$f(x,y)$, $g(x,y)$ を計算せよ.

(ii) D の中で $f(x,y)=0$ が定める陰関数 $y=\varphi(x)$ について，$\varphi'(x)$ を $f_x(x,\varphi(x))$ と $f_y(x,\varphi(x))$ を用いて表せ.

(iii) 上の $y=\varphi(x)$ を $g(x,y)$ に代入して得られる x の関数 $g(x,\varphi(x))$ の導関数 $\dfrac{dg(x,\varphi(x))}{dx}$ を $f_y(x,\varphi(x))$ と $J(x)=f_x(x,\varphi(x))\,g_y(x,\varphi(x))-f_y(x,\varphi(x))\,g_x(x,\varphi(x))$ を用いて表せ.

(iv) 上の $y=\varphi(x)$ のグラフを $\ell\ (\subset D)$ とおくとき，ℓ は D の境界のうち直線 $x=1$ を通らないことを証明せよ.

(v) $f(x,y)=g(x,y)=0$ となる (x,y) は D の中にいくつあるか？ 但し，上の設問の結果以外に以下の事実を用いてよい.

- (a) $f(x,y)=0$ を満たす D 内の点 (x,y) の集合は ℓ に一致する.
- (b) ℓ は D の内部でとぎれず，$y=x^2$ 上の一点 $P(x_1,\varphi(x_1))$ から $y=0$ 上の一点 $Q(x_2,\varphi(x_2))$ まで連続に続く.（ x_1, x_2 は $0<x_1<x_2<1$ を満たすある実数定数.）
- (c) $g(x_1,\varphi(x_1))<0$, $g(x_2,\varphi(x_2))>0$.
- (d) $(x,\varphi(x))\in D$ となる x に対して $J(x)<0$.

問３ (?)．　以下のいずれか該当するほうに答えよ.

(i) **講義に半分より多く出席した諸君．**　講義（教官）を「採点」せよ．即ち，良かったと思う点と（教官が）改善すべきだと思う点を各１つ以上挙げよ.

(ii) **講義のうち半分以下しか出席しなかった諸君．**　出席の少なかった理由と，試験のためにどのように勉強したかを答えよ. (半分くらい出席の場合は (ii) を選ぶこと．採点は回答者の実体験に基づく特徴が感じられるかどうかを基準とする.）

問 1 $(10 * 5 = 50)$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} y \sin xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[-\cos xy \right]_{x=0}^{x=\pi/2} dy = \int_0^1 1 - \cos \frac{\pi}{2} y \, dy = 1 - \frac{2}{\pi}$

(b) $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy =$ (積分順序の交換) $\int_0^1 e^{-x^2} \int_0^x dy \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$

(c) 教科書 p. 119 例題 5.2.3 のとおり．ガウス積分．たいていの教科書に載っているので計算例省略．(変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) 答 $\sqrt{\pi}/2$.

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 \le x+y \le 2,\ 0 \le x-y \le 2\}$ $\int_D (x-y) e^{x+y} \, dx \, dy =$ (変数変換 $u = x + y$, $v = x - y$) $= \int_0^2 \int_0^2 v e^u \frac{du \, dv}{2} = e^2 - 1$ (重積分はヤコビアンの絶対値．ヤコビアンを計算しながらかけ忘れた例も多し．なお，逐次積分も可能だが成功例なし.）

(e) C: $(1, 1)$ から $(-1, 3)$ へ直線で結んだもの：$x = 1 - 2t$, $y = 1 + 2t$, $0 \le t \le 1$. $\int_C x^2 \, dx + 2xy \, dy = \int_0^1 ((1 - 2t)^2 (-2) + 2(1 - 2t)(1 + 2t)\, 2) \, dt = -2$ (線積分は重積分と違って積分方向で符号が変わる．)

問 2 $(10 * 5 = 50)$.　領域 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 \le y \le x^2,\ 0 < x \le 1\}$ の上で $w(x, y) = x^3 + x^4 + 9x^4 y + 8xy^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ について.

(i) $f(x, y) = w_x(x, y)$ および $g(x, y) = w_y(x, y)$ を計算せよ.

$f(x, y) = 3x^2 + 4x^3 + 36x^3 y + 8y^3 - x$, $g(x, y) = 9x^4 + 24xy^2 - y$.

(ii) D の中で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数 $y = \varphi(x)$ について，$\varphi'(x)$ を $f_x(x, \varphi(x))$ と $f_y(x, \varphi(x))$ を用いて表せ.

D では $x > 0$ なので $f_y(x, y) = 36x^3 + 24y^2 > 0$ だから，陰関数定理から，$f(x, y) = 0$ を満たす任意の点の近くで微分可能な陰関数 $\varphi(x)$ が決まって，$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ $\left(= -\frac{6x + 12x^2 + 108x^2 y - 1}{36x^3 + 24y^2}\right.$．$\left.\right)$

(iii) $\frac{dg(x, \varphi(x))}{dx}$ を $f_y(x, \varphi(x))$ と $J(x) = f_x(x, \varphi(x))\, g_y(x, \varphi(x)) - f_y(x, \varphi(x))\, g_x(x, \varphi(x))$ を用いて表せ.

合成関数の微分公式から $\frac{dg(x, \varphi(x))}{dx} = g_x(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\, g_y(x, \varphi(x)) = \frac{-J(x)}{f_y(x, \varphi(x))}$.

(iv) 上の $y = \varphi(x)$ のグラフを ℓ $(\subset D)$ とおくとき，ℓ は D の境界のうち直線 $x = 1$ を通らないことを証明せよ.

φ の定義から ℓ 上では $f(x, y) = 0$ でなければならない．ところが $x = 1$ のとき D 上では $y \ge 0$ だから $f(1, y) = 6 + 36y + 8y^3 > 0$ となるので $f(x, y) = 0$ とはなれない．よって ℓ は D 上 $x = 1$ を通らない.

(v) $f(x, y) = g(x, y) = 0$ となる (x, y) は D の中にいくつあるか？

与えられた事実から求める点は $y = \varphi(x)$ を満たさなければならない．よってさらに $g(x, \varphi(x)) = 0$ を満たさないといけない．他方与えられた事実から，$(x, \varphi(x))$ が D 内にあるのは $x_1 \le x \le x_2$ のときで，さらに，前の設問の結果からそのとき $f_y(x, \varphi(x)) > 0$ であり，与えられた事実から $J(x) < 0$ だから，$\frac{dg(x, \varphi(x))}{dx} = \frac{-J(x)}{f_y(x, \varphi(x))} > 0$．即ち，$g(x, \varphi(x))$ は x について単調増加．最後に，与えられた事実から $g(x_1, \varphi(x_1)) < 0$, $g(x_2, \varphi(x_2)) > 0$ だから，ただ一つ x_0 が存在して，$g(x_0, \varphi(x_0)) = 0$ となる.
φ の定義から $f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$ でもあるから，この点が題意を満たすことは以上の議論から分かる．よって，求める点は 1 つである.
（問題とは関係ないが，設問に与えられた事実は講義の知識までで全て原理的には証明できる.）

問 3 (10).　都合により解答例を省略する.