数学基礎I　中間テスト

2002/06/18 高見剛・服部哲弥

注： 問１は必ず解答し，問２，３，４のうち２問を選んで解答せよ．また，１問毎に別の解答用紙を用いよ．

問１ (必須)． 実数 $\mathbf{R}$ 上の連続関数 f が，任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して $f(x+y) = f(x)+f(y)$ を満たすならば，$f(x) = c\,x$ の形でなければならないことを，以下の小問 (1)–(4) を解くことによって示せ.

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して $f(n\,x) = n\,f(x)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ.

(2) 上の結果を用いて， 任意の自然数 m, n と任意の実数 x に対して $f(\dfrac{n}{m}x) = \dfrac{n}{m}f(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) さらに (負の有理数や 0 も含めて)， 任意の有理数 q に対して $f(q) = q\,f(1)$ が成り立つことを示せ.

(4) x を実数とするとき，増加する有理数列 $r_0, r_1, r_2, \cdots$ で x に収束するものが存在することを， x が円周率の場合に具体的に示せ．(最初の数項を書いて，どのような規則で第 n 項を作ればよいかを説明せよ．)
さらに，以上のことを用いて， $f(1) = c$ とおくとき $f(x) = c\,x$, $x \in \mathbf{R}$, を示せ.

以下の問２から問４の中から２問を選んで解答せよ．

問２ (選択)． 第 n 項が $a_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{3^n+1}$ で与えられる数列 $a_1, a_2, \cdots$ は収束することを証明せよ.

問３ (選択)． f は閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数で，任意の $x \in [0,1]$ に対して $0 \le f(x) \le 1$ ならば，$[0,1]$ の中に $f(c) = c$ を満たす c が存在することを示せ.（講義中に紹介した定理は証明せずに用いてよい.）

問４ (選択)． 次の極限値を求めよ．但し $a \neq 0$ は定数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}((1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3})$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+a\,x)$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3^x-1}$.

数学基礎 I　中間テスト　**略解**　　　2002/06/19 高見剛・服部哲弥

問 1 $(10*4=40)$**.**　関数 $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が連続で $f(x+y)=f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbf{R}$, ならば $f(x)=c\,x$ の形でなければならないことを示せ．

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して $f(n\,x)=n\,f(x)$ が成り立つことを示せ．
$n=1$ のとき自明に成り立つ．$n=k$ のとき成り立つとする．すなわち，$f(k\,x)=k\,f(x),\ x\in\mathbf{R}$, とすると，仮定から $f((k+1)\,x)=f(k\,x+x)=f(k\,x)+f(x)=(k+1)\,f(x)$ となって，$n=k+1$ のときも成り立つので，帰納法により任意の自然数 n に対して成り立つ．

(2) 任意の自然数 m,n と任意の実数 x に対して $f(\dfrac{n}{m}\,x)=\dfrac{n}{m}\,f(x)$ が成り立つことを示せ．
上の結果から $f(x)=f(m\,\dfrac{x}{m})=m\,f(\dfrac{x}{m})$．さらに x に $n\,x$ を代入して上の結果を使うと $n\,f(x)=f(n\,x)=m\,f(\dfrac{n}{m}\,x)$．両辺を m で割れば求める式を得る．

(3) 任意の有理数 q に対して $f(q)=q\,f(1)$ が成り立つことを示せ．
問題に与えられた式で $x=y=0$ とおけば $f(0)=0$ を得る．また，$y=-x$ とおけば $0=f(x-x)=f(x)+f(-x)$ を得るので，$f(-x)=-f(x),\ x\in\mathbf{R}$．以上より任意の有理数 q に対して $f(q)=q\,f(1)$ が成り立つ．

(4) x を円周率とするとき，増加する有理数列 $r_0,r_1,r_2,\cdots$ で x に収束するものが存在することを具体的に示せ．
さらに，以上のことを用いて，$f(1)=c$ とおくとき $f(x)=c\,x,\ x\in\mathbf{R}$, を示せ．
最初の数項は，たとえば，$r_0=3,\ r_1=3.1,\ r_2=3.14$, などとすればよい．一般に，$r_0$ は x を越えない最大の整数をとる (そのような整数が存在することはアルキメデスの原理)．また，r_n は x の小数表示で小数点以下第 n 位までとった有限小数 (有理数) とすればよい．言い換えると r_{n-1} まで決めたとき，r_n は $(x-r_{n-1})\times 10^n$ の整数部を p とするとき，$r_n=r_{n-1}+p\times 10^{-n}$ で与えればよい．$\{r_n\}$ が増加する有理数列で元の値に収束することは作り方から明らか．
$f(x)=c\,x$ となることは，x が有理数のときは上で既に示した．x が無理数のときは，いま説明したような x に収束する増加有理数列 $\{r_n\}$ をとると，f が連続であるという仮定から，

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}r_n)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}c\,r_n=c\,x.$$

問 2 (30)**.**　第 n 項が $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$ で与えられる数列 $a_1,a_2,\cdots$ は収束することを証明せよ．

$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{3^n+1}>0$ なので増加数列である．また，等比数列の和の公式を用いると

$$a_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}(1-3^{-n})<\frac{1}{2}$$

なので上に有界である．よってこの数列は収束する．

問 3 (30)**.**　f は閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数で，任意の $x\in[0,1]$ に対して $0\le f(x)\le 1$ ならば，$[0,1]$ の中に $f(c)=c$ を満たす c が存在することを示せ．

$g(x)=x-f(x)$ とおくと，$g(0)=-f(0)\le 0,\ g(1)\ge 0$ である．g は閉区間 $[0,1]$ 上で連続だから，中間値の定理から $g(c)=0$ となる c が $0\le c\le 1$ に存在する．この c が求めるものである．

問 4 $(10 * 3 = 30)$**.**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3})$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3})\\
&=\frac{((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3})\,((1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3})}{x\,((1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3})}\\
&=\frac{1+x-(1-x)}{x\,((1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3})}\\
&=\frac{2}{((1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3})}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3})=\frac{2}{3}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+a\,x)$.

$a>0$ のとき $t=1/(ax)$ と変数変換すれば

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+a\,x)=a\lim_{t\to\infty}\log(1+\frac{1}{t})^t=a\log e=a\,.$$

$a<0$ でも同様であり，答はやはり a になる.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{1}{1-3^{-x}}=0\,.$$