数学基礎III　期末試験

問1，問2，問3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2003/01/28 服部哲弥

問1 (20)．　以下に従って日本の陸地の体積を式で表せ．答だけでよい．

地球の標高0メートルの面を（本当はほぼ球状だが日本付近だけみることにして）平面とみなし，この平面に直角座標を（例えば，緯度にそって x 座標，経度にそって y 座標を）入れる．平面の各点 (x, y) に対して，その点での標高（標高0メートル面を基準にしたときの陸地の高さ）を $h(x, y)$ とおき，また，平面の部分集合で標高0メートルより高い点の集合を D とおく．(式で書くと $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid h(x, y) \geq 0\}$，大ざっぱに言うと日本の土地.）このとき，日本の陸地（標高0メートル以上の部分）の体積を，D, h, および重積分を用いた数式で表せ．ただし，トンネルなどの中空部分は（少ないので答にほとんど影響がないから）最初から埋まっているものとしてよい．

問2 $(20 * 4 = 80)$．　以下の (a)–(d) の積分を講義の範囲の方法で計算せよ．(重積分の変数変換を用いた場合は，変換の具体形も書くこと.）

(a) $\displaystyle\iint_D \sin(3x + y)\, dxdy$, D: $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$　　(b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y e^{-(x-1)^2}\, dx \right) dy$

(c) $\displaystyle\iint_D e^{-(x+y)^2}\, dxdy$, D: $0 \leq x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$　　(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

問3 $(10 * 2 = 20)$．　平面内の $(0, 0)$ から $(1, 2)$ に向かうなめらかな曲線 C に対して線積分 $\displaystyle\int_C y^2 dx + 2xy\, dy$ を考える．以下の問に答えよ．

(a) C_1 を $(0, 0)$ から $(1, 2)$ に向かう線分とするとき，線積分 $\displaystyle\int_{C_1} y^2 dx + 2xy\, dy$ を計算せよ．

(b) $(0, 0)$ から $(1, 2)$ に向かう任意のなめらかな曲線 C に対して，$\displaystyle\int_C y^2 dx + 2xy\, dy = \int_{C_1} y^2 dx + 2xy\, dy$ となることを証明せよ．

数学基礎 III　期末試験　**略解**　　2003/01/29 服部哲弥

問 1 (20)**.**　日本の陸地の体積を式で表せ．$\iint_D h(x,y)\,dxdy.$

問 2 $(20*4=80)$**.**

(a) $\iint_D \sin(3x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(3x+y)\,dy\right)dx$

$= \int_0^{\pi/2}[-\cos(3x+y)]_0^{\pi/2}\,dx = \int_0^{\pi/2}(\sin(3x)+\cos(3x))\,dx = \frac{1}{3}[-\cos 3x+\sin 3x]_0^{\pi/2} = 0$

(b) $\int_0^1\left(\int_0^y e^{-(x-1)^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 e^{-(x-1)^2}\int_x^1 dy\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-(x-1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$

(c) 変数変換 $u=x+y$, $v=y$ によって，D は E: $0\le v\le u\le 1$ に移る．さらに，この変数変換のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ だから

$$\iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy = \int_0^1 e^{-u^2}\left(\int_0^u dv\right)du = \int_0^1 ue^{-u^2}\,du = -\frac{1}{2}\left[e^{-u^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

(d) ガウス積分．教科書 p. 119 例題 5.2.3 を初め，たいていの教科書に載っているので計算例省略． 2 乗した後，変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$．答 $\sqrt{\pi}/2$

問 3 $(10*2=20)$**.**　平面内の $(0,0)$ から $(1,2)$ に向かうなめらかな曲線 C に対して線積分 $\int_C y^2dx+2xy\,dy$ を考える．

(a) C_1 を $(0,0)$ から $(1,2)$ に向かう線分とするとき，線積分 $\int_{C_1} y^2dx+2xy\,dy$ を計算せよ．

C_1 の媒介変数表示として $x=t$, $y=2t$, $0\le t\le 1$, を取ることができる．このとき $x'(t)=1$, $y'(t)=2$ となるから

$$\int_{C_1} y^2dx+2xy\,dy = \int_0^1((2t)^1\cdot 1+2\cdot t\cdot 2t\cdot 2)\,dt = \int_0^1 12t^2\,dt = 4\,.$$

(b) $(0,0)$ から $(1,2)$ に向かう任意のなめらかな曲線 C に対して，$\int_C y^2dx+2xy\,dy = \int_{C_1} y^2dx+2xy\,dy$ となることを証明せよ．

C と C_1 で囲まれる領域を D とする．境界 ∂D の向きは C に沿って $(0,0)$ から $(1,2)$ に向かい， C_1 によって $(1,2)$ に戻る向きとする．即ち， $\partial D = C - C_1$．$P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=2xy$ としてグリーンの定理

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

を用いると，左辺は $\int_C y^2dx+2xy\,dy-\int_{C_1} y^2dx+2xy\,dy$，右辺は $\int_D(2y-2y)\,dxdy=0$, とそれぞれなるので，$\int_C y^2dx+2xy\,dy = \int_{C_1} y^2dx+2xy\,dy$ を得る．