数学基礎１　中間テスト

1999/06/01
高田庸介，服部哲弥

次の３題の中から２題を選んで答えよ.

問１.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ とおいて，数列 $\{a_n\}$ を定義する．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示せ。

ヒント．a_n の右辺を二項展開せよ。

問２.

次の条件をコーシーの判定条件という。

「数列 $\{a_n\}$ が収束するためには任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して

$$m > N,\ n > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

となることが必要十分である。」

この条件を用いて次の数列の収束発散について調べよ。

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots .$$

問３.

n を正の奇数とし，a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} を n 個の実数とする．x の奇数次の多項式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は，任意の実数 α に対して $P(x) = \alpha$ を満たす実数 x を少なくとも一つは持つことを示せ。

数学基礎１　中間テスト　**解答例**

1999/06/01 服部哲弥

問１． $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ **とおいて，数列** $\{a_n\}$ **を定義する．このとき** $\lim_{n\to\infty} a_n$ **が存在することを示せ。**

a_n を二項展開すると，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^4} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

a_n と a_{n+1} を比較するために n を $n+1$ に置き換えると

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

両者を比べる[1] と，$n \geq 1$ のとき，右辺のどの項も正であり[2]，a_{n+1} のほうが最後の項の分だけ１項多い．それ以外の項を項ごとに比較すると， a_n の右辺の $1-\dfrac{k}{n}$ という形の因子 (k は $1 \leq k \leq n-1$ なる自然数) の分母の n を $n+1$ に置き換えると a_{n+1} の対応する項を得る．$1 \leq k \leq n-1$ のとき $0 < 1-\dfrac{k}{n} < 1-\dfrac{k}{n+1}$ はすぐわかるから，結局，$a_n \leq a_{n+1}$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．すなわち，この数列 $\{a_n\}$ は単調増加である．

他方，$1 \leq k \leq n-1$ のとき $0 < 1-\dfrac{k}{n} < 1$ だから，上の a_n の式で，$1-\dfrac{k}{n}$ の形の因子を 1 に置き換えることで，

$$
a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}
$$

[1] a_{n+1} は a_n に比べて一項多いことを強調するため，最後から２番目の項も書いたので式が１行長くなっている．

[2] 途中の項を書いてしまったのでかえって見にくいが，a_n の右辺は最後の項に $1-\dfrac{n-1}{n}$ が出てきてそこでおしまいなので，例えば $1-\dfrac{3}{n}$ という因子は $n \geq 4$ のときしか出てこない．

がわかる[3]．2 以上の任意の自然数 k に対して $k! = k(k-1)\cdots 2 \geq 2^{k-1}$ であることに注意すると，$n \geq 2$ のとき

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

となるが，右辺の 2 項目以降は等比数列の和なので計算できて

$$a_n < 1 + \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

が成り立つ．よって，この数列は上に有界[4] である．

以上より，問題の数列 $\{a_n\}$ は単調増加・上に有界だから収束する．すなわち，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．

問２．次の条件をコーシーの判定条件という。

「数列 $\{a_n\}$ が収束するためには任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して

$$m > N,\ n > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

となることが必要十分である。」

この条件を用いて次の数列の収束発散について調べよ。 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$.

与えられた数列の第 n 項を a_n とおくと $a_n = (-1)^{n-1}$ と書ける．

$\varepsilon = 1$ と選ぶ[5]．（かってに与えられた）自然数 N に対して $m = N+1, n = N+2$ と選ぶと $m > N, n > N$ であって，かつ，

$$a_n - a_m = (-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}(1 - (-1)) = 2(-1)^{n+2}$$

だから $|a_n - a_m| = 2 \geq \varepsilon$ である．よってコーシーの判定条件の否定が成り立つから，この数列は収束しない．[6]

問３．n を正の奇数とし，a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1} を n 個の実数とする．x の奇数次の多項式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は，任意の実数 α に対して $P(x) = \alpha$ を満たす実数 x を少なくとも一つは持つことを示せ。

---

[3] $a_n \leq \cdots$ と書いても間違いではない．これから $\{a_n\}$ が上に有界であることを示す予定なので，その目的のためには等号付き不等号でも問題がない．どちらでも正解．

[4] $a_1 = 2 < 3$ も成り立っているから，上界として 3 が取れることを証明したことになる．

[5] $0 < \varepsilon \leq 2$ ならば何に選んでも以下の証明はそのまま成り立つ．こういうとき，「ε は $0 < \varepsilon \leq 2$（を満たすよう）にとる」と書いても正解だが，本文のようにかってに一つの値を選んで解答を書いても正解．

[6] 「任意の（／すべての）$\cdots$ に対して」の否定は「（ある／適当な）$\cdots$ が存在して」，「$\cdots$ が存在して」の否定は「任意の $\cdots$ に対して」．だから，特に，$N = 3$ など一つの N だけで $m > N, n > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立たないことを示しても不十分で，任意の N に対して否定が成り立つことを示さないと，コーシーの条件の否定を示したことにならない．

「$A \Rightarrow B$（A ならば B）」の否定は「A が成り立ち，かつ，B が成り立たない（A なのに B でない）」．特に，「$m > N,\ n > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$」の否定は「$m > N,\ n > N,\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon$」だから，解答例でこれら 3 つのことが成り立つことを示したのである．

なお，問題文に示されているとおり，コーシーの条件は数列の収束の必要十分条件であるから，コーシーの条件が成り立てば収束するし，否定が成り立てば収束しない．

奇数次の多項式で最高次の係数が 1 だから $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, かつ，$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ である．よってある実数 a が存在して $P(a) \leq \alpha - 1$ が成り立ち[7]，また，実数 $b > a$ が存在して[8] $P(b) \geq \alpha + 1$ も成り立つ．

多項式は閉区間 $[a, b]$ で連続関数だ[9] から，閉区間 $[a, b]$ における中間値の定理によって[10]，$a < c < b$ を満たすある実数 c に対して $P(c) = \alpha$ が成り立つ．

---

[7] 以下の証明は $\alpha - 1$ の代わりに α より小さい実数なら何でもよい．例えば「$\beta < \alpha$ をとってきたとき，ある実数 a に対して $P(a) \leq \beta$ が成り立ち」と書いても正解．

[8] $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ ということはどんな数（ここでは $\alpha + 1$ ）を持ってこられても，実数 x_0 が存在して $x \geq x_0$ ならば $P(x) \geq \alpha + 1$ とできるということなので，b として x_0 と $a + 1$ のうち大きい方をとれば $P(b) \geq \alpha + 1$ を満たす b が a より大きいところに見つかる．

[9] もちろん全実数上で連続だが，ここでは $[a, b]$ での連続性しか使わない．

多項式の連続性は，授業でふれたが，関数 $f(x) = x$ が連続であることを定義から示し，f, g が連続なら $f + g$, $f \cdot g$, そして定数 c に対して $c \cdot f$ がすべて連続になることを定義から示しておく．多項式は x の有限回の積の定数倍の和だから，連続関数となる．

[10] $-1 < 0 < 1$ だから，$P(a) = \alpha - 1 < \alpha < \alpha + 1 = P(b)$ となるので．