数学基礎１期末試験について．

火曜４限２Ｂ教室　担当：服部哲弥

1999/07/20

公式の発表のとおり，9/14(火曜)14:45– 2B 教室にて，期末試験を行う．持ち込みなし．

試験問題の予想.

1. 教科書の章末問題から.
   (i) 逆関数の微分の計算（導出の説明を含む）.
   (ii) ロピタルの定理を用いた極限の計算（導出の説明を含む）.
2. ニュートン法.（最終回の一回前の講義および講義録，および発展応用問題.）
3. 積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ とその周辺.（最終回の講義および講義録および教科書，および発展応用問題.）

成績 (S) のつけ方の予定.

1. 期末試験の成績 (K) を主とし，中間試験成績 (C) 等を加味する.
2. C 等の加味のしかたは，悪い成績を救う，良い成績はいつも良い点数を取る者に与えるべきである，公平感をなるべく損なわない，という考えに沿って，$S \approx (K + \frac{1}{200}((100-K)\vee 0)C)\wedge 100$ を目安に考えている．ここで $a \vee b = \max\{a,b\}$ は a と b のうち大きい方，$a \wedge b = \min\{a,b\}$ は小さい方を表す.しかし，これまでの経験に照らして，以上を確定とはせず，成績は試験採点終了後に決定する.
3. 公平を損なわないため，レポート等を含む試験後の情状酌量の申し出は受け付けない．また，公式に認められている追試験については，その規約通り，診断書等の証拠を必要とし，かつ，最後のバックアップという追試験本来の趣旨と，無理を押して正規の時間に受験する者との間の公平を期すること，によって，単位取得最低点を成績の上限とする.
   以上に関わらず，間違った採点の訂正は行う．但し，ほかの諸君に対する間違った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない.

以上の試験問題の予想や成績のつけかたの予定は，諸君の勉強の方針の便宜のために発表するものである.裏をかくつもりはないが，種々の不慮の事態によって変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで講義中に繰り返し指定したとおりであるから，範囲全てにわたって勉強するのが筋であり，話が違うという抗議は認めない.

また，名大の入学試験に合格した諸君ならば，これだけの情報があれば十分に単位を取得できるはずである．不正行為は（当然であるが）名大生としての誇りにかけて絶対に行わないように.

問い合わせ先：`hattori@math.nagoya-u.ac.jp` 服部哲弥

数学基礎１　期末テスト

1999/09/14 服部哲弥

問 1 (40).

(i) 関数 $f(x) = \sec x \left(= \dfrac{1}{\cos x} \right)$ の定義域を $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ とするときの逆関数を $\mathrm{arcsec}\, x$ と書くことにする．

(a) $\mathrm{arcsec}\, x$ のとる値の集合を書け．

(b) 導関数 $\dfrac{d\, \mathrm{arcsec}}{dx}(x)$ を求めよ．逆関数の微分の公式 $\dfrac{df^{-1}}{dx}(x) \dfrac{df}{dx}(f^{-1}(x)) = 1$ は自由に用いてよい．

(ii)(a) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} x \log x$ を求めよ．下向きの矢印は $x > 0$ の側から 0 に近づくことを意味する．計算の過程も示すこと．分母も分子も無限大に発散する場合にもロピタルの定理の結論が成り立つことは用いてよい．

(b) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} x^x$ を求めよ．議論の過程も簡単に示すこと．

問 2 (40).　２次導関数 f'' の存在する関数 f に対して方程式 $f(x) = 0$ の実数解の近似列 $\{c_n\} = \{c_n;\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ を帰納的に与える方法の一つに次のニュートン法が知られている．$p < q$ とする．閉区間 $[p, q]$ において f', f'' はともに正で，$f(p) < 0$, $f(q) > 0$ とする．このとき方程式 $f(x) = 0$ の解が開区間 (p, q) にただ一つあるので，それを $x = \gamma$ とおく．$c_1 = q$ とおく．$c_1, \cdots, c_{n-1}$, が求まっているとき，曲線 $y = f(x)$ の点 $(c_{n-1}, f(c_{n-1}))$ における接線 ℓ_{n-1} が x 軸と交わる点を $(c_n, 0)$ として c_n を定める．以上に関して以下の問に答えよ．

(i) 接線 ℓ_{n-1} の方程式を書け．

(ii) $\{c_n\}$ の漸化式を書け．

(iii) $a > 0$ に対して $f(x) = e^{ax} - 1$ とおく．$c_1 = 1$ として $f(x) = 0$ の解のニュートン法による近似列 $\{c_n\}$ を作る．ac_{n-1} が十分小さければ，c_n が c_{n-1}^2 にほぼ比例することを近似式 $e^x \approx 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ を用いて示し，その比例係数を a を用いて表せ．

(iv) 漸化式に f'' は出てこないにも関わらず，ニュートン法が成立するために f'' の符号に関する仮定が必要である．実は f'' の値は近似列の真の値への収束の速さに関係がある．このことを f の γ の周りのテーラー展開の２次までによる近似：$f(x) \approx f'(\gamma)(x - \gamma) + \dfrac{1}{2} f''(\gamma)(x - \gamma)^2$ を用いて議論し，$f''(\gamma)$ の大小と収束の速さの大小の関係を述べよ．

問 3 (40).　$J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, とおく．以下の問に答えよ．

(i) 部分積分を用いて J_{n+2} を J_n で表す漸化式を求めよ．

(ii) 上の結果を用いて（J_n の具体形を用いずに）$(n+1)J_n J_{n+1}$ が n によらない定数であることを示して，その定数を J_0, J_1 を具体的に計算することで求めよ．

(iii) J_n の単調性と上の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt{2n} J_{2n}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．

(iv) 上の漸化式を解いて J_{2n} の具体形を求めてから，上の極限を用いて $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt{2n} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ を求めよ．

数学基礎１　期末テスト　**解答例**

1999/09/15 服部哲弥

問 1 (40).

(i) **関数** $\sec x$ **の定義域を** $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ **とするときの逆関数を** $\operatorname{arcsec} x$ **と書く.**

(a) $\operatorname{arcsec} x$ **のとる値の集合を書け.**

$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$.

(b) $\dfrac{d\operatorname{arcsec}}{dx}(x)$ **を求めよ.**

$\operatorname{arcsec} x\in[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ だから $\sin(\operatorname{arcsec} x)\ge 0$．よって，$y=\operatorname{arcsec} x$ ($\Leftrightarrow x=1/\cos y$) ならば $\sin y=\sqrt{1-x^{-2}}$. これより，

$$\left(\frac{df^{-1}}{dx}(x)\right)^{-1}=\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))=\left.\frac{\sin y}{\cos^2 y}\right|_{y=\operatorname{arcsec} x}=|x|\sqrt{x^2-1}\,.$$

よって $\dfrac{d\operatorname{arcsec}}{dx}(x)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,.$

(ii)(a) $\lim_{x\downarrow 0} x\log x$ **を求めよ.**

ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\downarrow 0} x\log x=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\downarrow 0}-x=0\,.$$

(b) $\lim_{x\downarrow 0} x^x$ **を求めよ.**

指数関数 $\exp x$ の連続性より

$$\lim_{x\downarrow 0}x^x=\lim_{x\downarrow 0}\exp(x\log x)=\exp(\lim_{x\downarrow 0}x\log x)=\exp(0)=1\,.$$

問 2 (40).　**ニュートン法は曲線** $y=f(x)$ **の点** $(c_{n-1},f(c_{n-1}))$ **における接線** ℓ_{n-1} **が** x **軸と交わる点を** $(c_n,0)$ **として** c_n **を定める．以上に関して以下の問に答えよ.**

(i) ℓ_{n-1} **の方程式を書け.**

$y=f'(c_{n-1})(x-c_{n-1})+f(c_{n-1})$.

(ii) $\{c_n\}$ **の漸化式を書け.**

$c_n=c_{n-1}-\dfrac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})}$.

(iii) $a>0$ **に対して** $f(x)=e^{ax}-1$ **とおく．** ac_{n-1} **が十分小さければ，** c_n **が** c_{n-1}^2 **にほぼ比例することを示し，その比例係数を** a **を用いて表せ.**

$$c_n\approx c_{n-1}-\frac{ac_{n-1}+\frac{1}{2}(ac_{n-1})^2}{a(1+ac_{n-1})}=\frac{ac_{n-1}^2}{2(1+ac_{n-1})}\approx\frac{1}{2}ac_{n-1}^2.$$

比例係数は $a/2$.

（注意：解は a に無関係に $x=0$ ただ一つだから，a 依存性は近似列の極限値とは無関係．収束の速さに関係することは次の小問の具体例になっている.）

(iv) f'' **の値は近似列の真の値への収束の速さに関係があることを** f **の** γ **の周りのテーラー展開の２次までによる近似を用いて議論し，** $f''(\gamma)$ **の大小と収束の速さの大小の関係を述べよ.**

$f(x)\approx f'(\gamma)(x-\gamma)+\dfrac{1}{2}f''(\gamma)(x-\gamma)^2$, および $f'(x)\approx f'(\gamma)+f''(\gamma)(x-\gamma)$, から,

$$c_n=c_{n-1}-\frac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})}\approx\frac{f''(\gamma)(c_{n-1}-\gamma)^2}{2(f'(\gamma)+f''(\gamma)(c_{n-1}-\gamma))}$$

を得る．この式は $f''(\gamma)>0$ について単調増加だから，$f''(\gamma)$ が大きいほど（f の γ 付近での曲がり方が大きいほど）ニュートン法の収束は遅く，小さいほど（ f が直線に近いほど）ニュートン法の収束は速い.

問 3 (40). $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, **とおく．以下の問に答えよ．**

(i) **部分積分を用いて** J_{n+2} **を** J_n **で表す漸化式を求めよ．**

$$J_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \cdot \sin x\,dx = -\sin^{n+1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x\,dx = (n+1)(J_n - J_{n+2}).$$

よって求める漸化式は $J_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} J_n$.

(ii) **上の結果を用いて（**J_n **の具体形を用いずに）**$(n+1)J_n J_{n+1}$ **が** n **によらない定数であることを示して，その定数を** J_0, J_1 **を具体的に計算することで求めよ．**

$n \geq 2$ のとき，漸化式から $J_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} J_{n-1}$ を得るから，$(n+1)J_{n+1}J_n = nJ_nJ_{n-1}$ を得る．右辺は左辺の n に $n-1$ を代入したものになっているから，これを繰り返し使うことで結局全ての自然数 n について $(n+1)J_{n+1}J_n = J_0J_1$ を得る．即ち，n によらない．

$J_0 = \pi/2$, $J_1 = 1$ は容易に得られるから，$(n+1)J_{n+1}J_n = J_0J_1 = \pi/2$.

(iii) J_n **の単調性と上の結果を用いて** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n} J_{2n}$ **が収束することを示し，その極限値を求めよ．**

あきらかに J_n は n について単調減少するので，

$$J_{2n+1} \leq J_{2n} \leq J_{2n-1}\,.$$

辺々 $2nJ_{2n}$ をかけて上の結果を使うと

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \leq 2nJ_{2n}^2 \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

よって，挟み撃ちの原理より，$n \to \infty$ で $2nJ_{2n}^2$ は収束して，極限値は $\pi/2$ になる．関数 $\sqrt{x}$ の連続性より，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}J_{2n}$ は収束して，その極限値は $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ である．

(iv) **上の漸化式を解いて** J_{2n} **の具体形を求めてから，上の極限を用いて** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ **を求めよ．**

漸化式と $(2n)!!(2n-1)!! = (2n)!$, $(2n)!! = 2^n n!$ より

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}J_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

となるから，上の結果より，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

（Wallis の公式.）