数学基礎３　服部担当　中間試験

１１月２５日木曜日，通常の講義時間(3限，ただし試験時間は 13:00-14:00 の１時間) に通常の講義室 (14) で，中間試験を行う（「持ち込み禁止」）．

この試験の得点の科目成績への効果は前期（数学基礎１）服部担当の中間試験に準じる．すなわち，

1. 試験範囲は第２節まで全部（テーラーの定理まで）とする．
2. 学期末試験を主とし，中間試験を副とする．特に，中間試験が満点でも学期末試験が著しく悪い場合は不合格となることがある．
3. 一回の試験の範囲を狭め，学期末試験における若干の不出来を救済する目的の試験である．逆に言えば，中間試験の成績に著しい差がある場合には学期末試験の成績順位と科目成績順位や合否との間に逆転が起こりうる．
4. 科目の成績が良いためには常に良い成績をあげなければならない．特に，中間試験が満点でも学期末試験があまり良くない場合は，良い科目成績にならない可能性がある．

数学基礎３　中間試験

1999/11/25
高田庸介，服部哲弥

$D = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x;y) \neq (0;0)\} \subset \mathbf{R}^2$ **とする．** $f(x;y) = \log(x^2+y^2)$ **で定義される関数** $f:\ D \to \mathbf{R}$ **について以下の問に答えよ．**

問１.

偏導関数 f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} , f_{xx} , f_{yy} たちを求めよ.

問２.

f が定義域 D の各点で全微分可能かどうか調べよ.

問３.

f を $(x;y) = (1;1)$ のまわりで x, y の２次までテーラー展開せよ.（テーラーの定理で２次の項までを示し，３次の剰余項は書かなくてよい.）

数学基礎３　中間試験　**解答例**

1999/11/26 服部哲弥

$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}\subset\mathbf{R}^2$ とする．$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ で定義される関数 $f:\ D\to\mathbf{R}$ について以下の問に答えよ．

問１． 偏導関数 f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} , f_{xx} , f_{yy} たちを求めよ．

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2}\,,\\
f_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2}\,,\\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,.
\end{aligned}
$$

問２． f が定義域 D の各点で全微分可能かどうか調べよ．

f_x, f_y は（有理式なので）問１より D の各点で存在して連続であるから,（講義で示した定理４により） f は全微分可能である．

（参考：講義で示した定理を用いない別解の方針.）$(x,y)\in D$, すなわち $(x,y)\neq(0,0)$ とする．１変数関数のテーラーの定理によれば,

$$\log(1+u)=\frac{u}{1+u\theta}\,,\quad 0<\theta<1,$$

を満たす θ が $|u|<1$ を満たす各 u に対して存在する．特に, $|u|<1/2$ ならば $1+u\theta>1/2$ となるので

$$|\log(1+u)-u| = \frac{u^2\theta}{1+u\theta}\le 2u^2\,.$$

これを用いると, $u=\dfrac{2hx+2ky+h^2+k^2}{x^2+y^2}$ とおくとき,

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f(x+h,y+k)-f(x,y)-hf_x(x,y)-kf_y(x,y)|\le\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(2u^2+\frac{h^2+k^2}{x^2+y^2}\right)$$

を得るが,（詳しく計算すると）右辺は $(h,k)\to(0,0)$ のとき 0 に収束するので, $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ は全微分可能である．

問３． f を $(x,y)=(1,1)$ のまわりで x, y の２次までテーラー展開せよ.（テーラーの定理で２次の項までを示し, ３次の剰余項は書かなくてよい.）

問１の結果を用いることにより,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1,1)+(x-1)f_x(1,1)+(y-1)f_y(1,1)\\
&\quad+\frac{1}{2}(x-1)^2f_{xx}(1,1)+(x-1)(y-1)f_{xy}(1,1)+\frac{1}{2}(y-1)^2f_{yy}(1,1)+\cdots\\
&= \log 2+(x-1)+(y-1)-(x-1)(y-1)+\cdots
\end{aligned}
$$

を得る．