測度論・ルベーグ積分論　中間試験

問 1，問 2，問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2005/05/24 服部哲弥

以下で $\emptyset$ は空集合，(a,b) は開区間，$[a,b)$ は左側閉右側開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$ を，それぞれ表す．この他 $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$，$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq a\}$ などの記号も用いる．

問 1 (25)．　実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合を要素とする次の 5 つの集合族（下記選択肢）のうち σ 加法族になっているものを全て答案用紙に書き写せ．

選択肢：　整数 n **に対して** $A_n = [n, n+1)$ **とおくとき，集合族** $\{A_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$**，**
$\{\emptyset,\ \mathbb{R}\}$**，**　$\{\emptyset,\ (-\infty,1),\ (-\infty,3),\ [1,3),\ [1,\infty),\ [3,\infty),\ (-\infty,1) \cup [3,\infty),\ \mathbb{R}\}$**，**
$\mathbb{R}$ **の開集合を全て要素とする集合族，**　$\mathbb{R}$ **の部分集合を全て要素とする集合族**

問 2 (10 + 25)．　Ω は集合（全体集合），$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる σ 加法族，集合関数 $\mu :\ \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は $\mu(\emptyset) = 0$ を満たしているとする．以下の問に答えよ．

(i)　この集合関数 μ が測度であるとは，あと 2 つの性質を持つことであった．それは何か．次の語群の中から 2 つ選んで解答用紙に書け．

語群：　積分可能性，非可算性，非負性，普遍性，一意性，抽象性，無限性，有限性，有限加法性，劣加法性，σ **加法性，**σ **有限性，単調性，完全性，完備性，連続性，解析性．**

(ii)　次の 2 つの文中の空欄 (a)–(e) に適切な数式を入れて，それぞれ小問 (i) の 2 つの性質の説明になるようにせよ．解答用紙には (a) $\cdots$, (b) $\cdots$, などと記せ．

$\cdot$ $A \in \boxed{\text{(a)}}$ を満たす任意の集合 $A \subset \Omega$ に対して，$\mu(A) \boxed{\text{(b)}}\, 0$ が成り立つ．

$\cdot$ $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $A_n \in \mathcal{F}$ であって，かつ，$n \neq m$ を満たす全ての自然数の組 n, m に対して $\boxed{\text{(c)}} = \emptyset$ ならば，$\mu\left(\boxed{\text{(d)}}\, A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\text{(e)}}$.

問 3 (15 + 10 + 15)．　$\mathbb{R}$ を全体集合とし，その開区間 (a,b) $(a < b)$ を全て要素に持つ最小の σ 加法族を $\mathcal{B}$ とおく．以下の問に答えよ．

(i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{a\} \in \mathcal{B}$ であることを σ 加法族の定義に戻って証明せよ．(たとえば開区間 $A_n = (a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n})$ の列を考えても良い．）さらに $(-\infty, a] \in \mathcal{B}$ を証明せよ．

(ii) 実数上の実数値関数 $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がボレル可測関数であるとは，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq a\} \in \mathcal{B}$ となることを言う．この定義に基づいて，$\mathbb{R}$ 上の非減少関数（$x < y$ ならば $f(x) \leqq f(y)$ となる関数）はボレル可測関数であることを証明せよ．

(iii)　$\phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，x が無理数のとき $\phi(x) = 0$，x が有理数のとき $\phi(x) = 1$，で定義された関数とする．このとき，ϕ がボレル可測関数であることを示し，さらに，$a < b$ に対して $\mu((a,b)) = b - a$ を満たす $\mathcal{B}$ 上の測度（ボレル測度）μ について，積分 $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) d\mu(x)$ を求めよ．（そのような性質を持つ μ が存在することは仮定する.）

測度論　中間試験　**略解**　　2005/05/31 服部哲弥

問 1 $(5*5)$**.**　σ 加法族はどれか？

$\{\emptyset,\ \mathbb{R}\}$,　$\{\emptyset,\ (-\infty,1),\ (-\infty,3),\ [1,3),\ [1,\infty),\ [3,\infty),\ (-\infty,1)\cup[3,\infty),\ \mathbb{R}\}$,

$\mathbb{R}$ の部分集合を全て集めた集合族　の 3 つ.

問 2 $(5*2+5*5)$**.**

(i)　σ 加法族 $\mathcal{F}\subset 2^{\Omega}$ 上の関数 $\mu:\ \mathcal{F}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が測度であるとは $\mu(\emptyset)=0$ 以外に何を満たすことを言うか？

非負性,　σ 加法性

(ii)　$\cdot$ $A\in\boxed{\text{(a)}\ \mathcal{F}}$ を満たす任意の集合 $A\subset\Omega$ に対して，$\mu(A)\boxed{\text{(b)}\ \geqq}0$ が成り立つ.

$\cdot$ $n=1,2,3,\cdots$ に対して $A_n\in\mathcal{F}$ であって，かつ，$n\neq m$ を満たす全ての自然数の組 n,m に対して $\boxed{\text{(c)}\ A_n\cap A_m}=\emptyset$ ならば，$\mu\left(\boxed{\text{(d)}\ \bigcup_{n=1}^{\infty}}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{\text{(e)}\ \mu(A_n)}$.

問 3 $((10+5)+10+(5+10))$**.**　$\mathbb{R}$ を全体集合とし，その開区間 (a,b) $(a<b)$ を全て要素に持つ最小の σ 加法族を $\mathcal{B}$ とおく.

(i) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $\{a\}\in\mathcal{B}$ であることおよび $(-\infty,a]\in\mathcal{B}$ を証明せよ.

定義から $A_n=(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})\in\mathcal{B}$. σ 加法族は補集合に関して閉じているから $(-\infty,a-\frac{1}{n}]\cup[a+\frac{1}{n},\infty)\in\mathcal{B}$. σ 加法族は可算和に関して閉じているから $\{a\}^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left((-\infty,a-\frac{1}{n}]\cup[a+\frac{1}{n},\infty)\right)\in\mathcal{B}$. σ 加法族は補集合に関して閉じているから $\{a\}\in\mathcal{B}$. 同様に，定義から $(-n,a)\in\mathcal{B}$ で σ 加法族は可算和に関して閉じているから $(-\infty,a)\in\mathcal{B}$. 既に $\{a\}\in\mathcal{B}$ が証明済みで，σ 加法族は有限和に関して閉じているから $(-\infty,a]\in\mathcal{B}$.

(ii) $\mathbb{R}$ 上の非減少関数はボレル可測関数であることを証明せよ.

$a<f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, ならば $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\leqq a\}=\emptyset\in\mathcal{B}$ なので，そうでないとしてよい. このとき $x_a=\sup\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\leqq a\}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ とおくと，f は非減少だから，$x<x_a$ ならば $f(x)\leqq a$，$x>x_a$ ならば $f(x)>a$ なので，$\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\leqq a\}$ は $(-\infty,x_a)$ または $(-\infty,x_a]$ に等しいが，ボレル σ 加法族の定義と小問 (i) の後半の結果からどちらにしても $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\leqq a\}\in\mathcal{B}$ となるので，f は可測関数である.

(iii) $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，x が無理数のとき $\phi(x)=0$，x が有理数のとき $\phi(x)=1$，で定義された関数とする. このとき，ϕ がボレル可測関数であることを示し，さらに，$a<b$ に対して $\mu((a,b))=b-a$ を満たす $\mathcal{B}$ 上の測度（ボレル測度）μ について，積分 $\int_{\mathbb{R}}\phi(x)d\mu(x)$ を求めよ.

小問 (i) で証明したように 1 点集合は $\mathcal{B}$ の要素であり，σ 加法族は可算和に関して閉じていて，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合だから $\mathbb{Q}\in\mathcal{B}$. よって，$a<0$ ならば $\{x\in\mathbb{R}\mid\phi(x)\leqq a\}=\emptyset\in\mathcal{B}$，$0\leqq a<1$ ならば $\{x\in\mathbb{R}\mid\phi(x)\leqq a\}=\mathbb{Q}^c\in\mathcal{B}$，$1\leqq a$ ならば $\{x\in\mathbb{R}\mid\phi(x)\leqq a\}=\mathbb{R}\in\mathcal{B}$，だから ϕ は可測関数である.

$\phi=\chi_{\mathbb{Q}}$ となるから，積分の定義により $\int_{\mathbb{R}}\phi(x)d\mu(x)=\mu(\mathbb{Q})$. $\mathbb{Q}$ は可算集合だから，測度の σ 加法性から $\mu(\mathbb{Q})=\sum_{a\in\mathbb{Q}}\mu(\{a\})$. 一方，$\mu$ の定義から $\mu(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})=\frac{2}{n}$ なので，測度の連続性から $\mu(\{a\})=\lim_{n\to\infty}\mu(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ が任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して成り立つので，$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)d\mu(x)=0$.