# 測度論・ルベーグ積分論　期末試験

**問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．**

2005/07/12 服部哲弥

**問 1 (30)．**　実数の集合 $\mathbb{R}$ の（無限を許した意味での）区間，すなわち，$a < b$ なる実数 $a, b$ に対して，$(a, b]$, $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$, 空集合 $\emptyset$, $\mathbb{R}$, の形の集合，を全て集めた集合族を $\mathcal{I}$ と書く．通常の意味の長さの拡張概念となる測度（1 次元ルベーグ測度），すなわち，$(a, b] \in \mathcal{I}$ に対して $\mu(\,(a, b]\,) = b - a$ となる測度 $\mu$ が存在することが知られていて，講義で構成（存在証明）した．この構成の手順を説明する次の文章の空欄（10 箇所）に当てはまる語句等を下の語群から選び，(a) ○○○ (b) ... のように答案用紙に解答せよ．

$\mathbb{R}$ 上の区間塊の族 $\mathcal{J} = \{\bigcup_{i=1}^{n} I_i \mid n \in \mathbb{N},\ I_i \in \mathcal{I},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\mathbb{R} \in \mathcal{J}$ であって補集合と有限和の集合算について閉じているので，$\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad}$ である．しかし，可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ について閉じていないので $\boxed{\text{(b)}\qquad\qquad}$ ではない．

$m(\emptyset) = 0$, $m(\,(a, b]\,] = b - a$, $a < b$, および無限区間 $I$ に対して $m(I) = \infty$ なる集合関数 $m$ は有限加法性を満たすように自然かつ一意的に $\mathcal{J}$ 上に拡張できて $m: \mathcal{J} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は非負で有限加法性を持つ集合関数，すなわち，$\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad}$ になる．

$A \subset \mathbb{R}$ に対して $\Gamma(A) = \boxed{\text{(d)}\quad}\{\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supset A,\ J_n \in \mathcal{J}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)\}$ とおくと，$\Gamma$ は $\Gamma(\emptyset) = 0$ を満たし，非負性，単調性，$\boxed{\text{(e)}\qquad\qquad}$，の諸性質を持つ．このことを $\Gamma$ は $\boxed{\text{(f)}\qquad\qquad}$ であるという．

$\Gamma$ は $\sigma$ 加法性を持つとは限らないが，定義域を制限することで，$\sigma$ 加法性を持つようにできる．どんな $A \subset \mathbb{R}$ に対しても $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(\boxed{\text{(g)}\qquad\qquad}) = \Gamma(\boxed{\text{(h)}\quad})$ を満たす $E \subset \mathbb{R}$ を全て集めた集合族を $\mathcal{F}$ とおくと，$\mathcal{F}$ が $\sigma$ 加法族になることが若干の議論によって証明できる．この性質を持つ集合 $E$ を (Γ–)$\boxed{\text{(i)}\qquad\qquad}$ と呼ぶ．そして，$\mu = \Gamma|_{\mathcal{F}}$，すなわち，$\Gamma$ の定義域を $\mathcal{F}$ に制限した集合関数を $\mu$ とおくと，$\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ および，$\mu$ が $\mathcal{F}$ 上の $\boxed{\text{(j)}\qquad}$ になることも証明できる．

最後に，$m$ は $\mathcal{J}$ 上 $\sigma$ 加法的なので，$\mu|_{\mathcal{J}} = m$ が成り立つことも証明できる．$m$ が $\mathcal{J}$ 上 $\sigma$ 加法的であることを証明する際に実数の位相的性質を用いるので，以上の手順を $\mathbb{R}$ 以外の空間上の測度の構成に応用する場合にはこの証明が鍵になる．

以上によって，測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている測度であることが分かる．$\mu$ を 1 次元ルベーグ測度と呼ぶ．

**語群**

有限加法族，$\sigma$ 有限性，$\sigma$ 加法族，有限加法的測度，内測度，外測度，超測度，測度，積分可能性，劣等性，劣加法性，普遍性，特殊性，一意性，可算集合，非可算集合，非可測集合，可測集合，max，min，sup，inf，$\overline{\lim}$，$\underline{\lim}$，lim，$A$，$E$，$E^c \cap A$，$E \cap A^c$

**問 2** (30)**.**　$(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間（区間 $[a,b)$ に対して $\mu_1([a,b)) = b-a$ となる $\mathbb{R}$ 上の測度） とする．$f_n,\ n=1,2,\cdots,$ が各点で非負，および $n$ に関して非減少な単関数列で $f$ に各点収束するとき，その積分 $I_n = \displaystyle\int_{[0,1)} f_n(x)\,d\mu_1(x)$ は積分 $\displaystyle\int_{[0,1)} f(x)\,d\mu_1(x)$ に収束する．$f(x)=\sqrt{x}$ について以上を具体的に計算しよう．以下の問に答えよ．

**(1)** 自然数 $n$ と $0 \leqq x < 1$ に対して，

$$f_n(x) = (k-1)\,2^{-n}, \quad (k-1)\,2^{-n} \leqq \sqrt{x} < k\,2^{-n}, \quad k=1,2,\cdots,2^n,$$

によって関数列 $f_n,\ n=1,2,\cdots,$ を定義すると，これが $0 \leqq x < 1$ において（非負なのは明らかだが，さらに）$n$ に関して非減少な単関数列で $\sqrt{x}$ に各点収束すること，を証明せよ．

**(2)** 自然数 $N$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(k-1)$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k(k-1)$ を計算してそれぞれ $N$ 以外の変数を使わずに表せ．

**(3)** 小問 (1) で与えた $f_n$ について，$I_n = \displaystyle\int_{[0,1)} f_n(x)\,d\mu_1(x)$ を計算して，$n$ 以外の変数を使わずに表せ．さらに $I = \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を計算せよ．

**問 3** (30)**.**　$(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間，$f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を非負値可積分関数とし， $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < f(x) < 1\}$ および $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqq f(x)\}$ とおく． 以下の問に答えよ．$a>0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ は用いてよいが，用いた収束定理は明示すること．

**(1)** （$E_1$ 上で $f(x)^{1/n}$ は $n$ について単調増加であることは明らかとして）
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1)$ を証明せよ．

**(2)** （$E_2$ 上で $f(x)^{1/n} \leqq f(x)$ が成り立つことは明らかとして）
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_2)$ を証明せよ．

**(3)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1 \cup E_2)$ を証明せよ．

**問 4** (10)**.**　（この問題に限り，質問に沿った，意味のある回答であれば，回答内容で点数は変わりません.）大学院進学の希望があるかないかを答え，(i) 希望がない場合はその理由，(ii) 進学希望の場合は修士までか博士までか，をそれぞれ答えてください．

（上記問に回答したくない場合は，次の問題で代えることもできます：この講義（ルベーグ積分）でもっとも興味深かった数学的内容（定義，定理，議論の展開等何でも）について答案用紙１／３以上１面以内で論述せよ.）

測度論　期末試験　**略解**　　2005/07/13 服部哲弥

**問 1 (3 ∗ 10).**　$\mathbb{R}$ 上の区間塊の族 $\mathcal{J} = \{\bigcup_{i=1}^{n} I_i \mid n \in \mathbb{N},\ I_i \in \mathcal{I},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\mathbb{R} \in \mathcal{J}$ であって補集合と有限和の集合算について閉じているので，$\boxed{\text{(a) 有限加法族}}$ である．しかし，可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ について閉じていないので $\boxed{\text{(b) } \sigma \text{ 加法族}}$ ではない．

$m(\emptyset) = 0$, $m(\,(a, b]\,) = b - a$, $a < b$, および無限区間 $I$ に対して $m(I) = \infty$ なる集合関数 $m$ は有限加法性を満たすように自然かつ一意的に $\mathcal{J}$ 上に拡張できて $m\colon\ \mathcal{J} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は非負で有限加法性を持つ集合関数，すなわち，$\boxed{\text{(c) 有限加法的測度}}$ になる．

$A \subset \mathbb{R}$ に対して $\Gamma(A) = \boxed{\text{(d) inf}}\{\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supset A,\ J_n \in \mathcal{J}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)\}$ とおくと，$\Gamma$ は $\Gamma(\emptyset) = 0$ を満たし，非負性，単調性，$\boxed{\text{(e) 劣加法性}}$，の諸性質を持つ．このことを $\Gamma$ は $\boxed{\text{(f) 外測度}}$ であるという．

$\Gamma$ は $\sigma$ 加法性を持つとは限らないが，定義域を制限することで，$\sigma$ 加法性を持つようにできる．どんな $A \subset \mathbb{R}$ に対しても $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(\boxed{\text{(g) } E^c \cap A}) = \Gamma(\boxed{\text{(h) } A})$ を満たす $E \subset \mathbb{R}$ を全て集めた集合族を $\mathcal{F}$ とおくと，$\mathcal{F}$ が $\sigma$ 加法族になることが若干の議論によって証明できる．この性質を持つ集合 $E$ を $(\Gamma$–$)\boxed{\text{(i) 可測集合}}$ と呼ぶ．そして，$\mu = \Gamma|_{\mathcal{F}}$，すなわち，$\Gamma$ の定義域を $\mathcal{F}$ に制限した集合関数を $\mu$ とおくと，$\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ および，$\mu$ が $\mathcal{F}$ 上の $\boxed{\text{(j) 測度}}$ になることも証明できる．

最後に，$m$ は $\mathcal{J}$ 上 $\sigma$ 加法的なので，$\mu|_{\mathcal{J}} = m$ が成り立つことも証明できる．$m$ が $\mathcal{J}$ 上 $\sigma$ 加法的であることを証明する際に実数の位相的性質を用いるので，以上の手順を $\mathbb{R}$ 以外の空間上の測度の構成に応用する場合にはこの証明が鍵になる．

以上によって，測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている測度であることが分かる．$\mu$ を 1 次元ルベーグ測度と呼ぶ．

**問 2 (10∗3).**　$(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間 とする．$f_n$, $n = 1, 2, \cdots$, が各点で非負，および $n$ に関して非減少な単関数列で $f$ に各点収束するとき，その積分 $I_n = \int_{[0,1)} f_n(x)\, d\mu_1(x)$ は積分 $\int_{[0,1)} f(x)\, d\mu_1(x)$ に収束する．$f(x) = \sqrt{x}$ について以上を具体的に計算しよう．

**(1)**

$$f_n(x) = (k-1)\, 2^{-n},\quad (k-1)\, 2^{-n} \leqq \sqrt{x} < k\, 2^{-n},\quad k = 1, 2, \cdots, 2^n,$$

が $0 \leqq x < 1$ において（非負なのは明らかだが，さらに）$n$ に関して非減少な単関数列で $\sqrt{x}$ に各点収束すること，を証明せよ．

非減少であることは，ある自然数 $k$ に対して $(2k-1)\, 2^{-n-1} \leqq \sqrt{x} < 2k\, 2^{-n-1}$ ならば $(k-1)\, 2^{-n} \leqq \sqrt{x} < k\, 2^{-n}$ なので $f_{n+1}(x) = (2k-1)\, 2^{-n-1} > 2(k-1)\, 2^{-n-1} = f_n(x)$, $(2k-2)\, 2^{-n-1} \leqq \sqrt{x} < (2k-1)\, 2^{-n-1}$ ならば $(k-1)\, 2^{-n} \leqq \sqrt{x} < k\, 2^{-n}$ なので $f_{n+1}(x) = (k-1)\, 2^{-n} = f_n(x)$，となってどんな $x \in [0, 1)$ についても $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ となることから，単関数であることは $f_n$ の値域が有限集合 $\{(k-1)\, 2^{-n} \mid k = 1, \cdots, 2^n\}$ であることと各値を与える $x$ の集合が区間 $[\,(k-1)^2\, 2^{-2n},\ k^2\, 2^{-2n}\,)$ だから．そして，$\sqrt{x} - 2^{-n} < f_n(x) \leqq \sqrt{x}$ だから $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x}$ である．

**(2)** $\sum_{k=1}^{N} (k-1) = \frac{1}{2} N(N-1)$, $\sum_{k=1}^{N} k(k-1) = \frac{1}{3}(N+1)N(N-1)$.

**(3)** 小問 (1) の結果とルベーグ測度の定義，そして小問 (2) を用いると，

$$I_n = \sum_{k=1}^{2^n}(k-1)\,2^{-n} \times (k^2 2^{-2n} - (k-1)^2 2^{-2n}) = 2^{-3n}\left(2\sum_{k=1}^{2^n} k(k-1) - \sum_{k=1}^{2^n}(k-1)\right)$$
$$= 2^{-3n}\left(\frac{2}{3}2^n + \frac{1}{6}\right) 2^n(2^n-1) = \frac{2}{3} - 2^{-n-1} - \frac{1}{6}2^{-2n}.$$

よって $I = \dfrac{2}{3}$.

**問 3 (10 ∗ 3).** $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < f(x) < 1\}$ および $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqq f(x)\}$ とおく.

**(1)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1)$ を証明せよ.

単調収束定理によって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \int_{E_1}\lim_{n\to\infty} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1).$$

**(2)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_2)$ を証明せよ.

$f$ が $E_2$ 上可積分という仮定に注意すれば，優収束定理によって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \int_{E_2}\lim_{n\to\infty} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_2).$$

**(3)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1 \cup E_2)$ を証明せよ.

$\mathbb{R} \setminus (E_1 \cup E_2)$ 上では $f = 0$ なので $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus(E_1\cup E_2)} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = 0$ となること，および，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ が定義から成り立つことに注意すると，小問 (1)(2) の結果から
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) + \lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{1/n}\,d\mu_1(x) = \mu_1(E_1) + \mu_1(E_2) = \mu_1(E_1 \cup E_2)$ となる.

**問 4 (10).** 都合により解答例を省略します.