解析学概論Ｂ２（測度論・ルベーグ積分論）　後期　中間試験

問１，問２，問３ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2005/11/29 服部哲弥

以下で $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の閉区間を表す．また断らなければ $\int \cdot\, dx$ は１次元ルベーグ積分を表す．

問１ (40)**.**　非負値ルベーグ可積分関数 f, g について以下に答えよ．Fubini の定理は，用いたことを明示すれば，証明無く用いてよいが，Fubini の定理から導かれる式は講義や教科書にあるものでも証明の上用いよ．

(i) １次元ルベーグ可測集合 E に対して $\mu(E) = \displaystyle\int_E g(x)\,dx$ で定義される集合関数 μ は（１次元ルベーグ可測空間上の）測度であることを証明せよ．（測度の定義を確認するためだけの問題なので，ルベーグ積分に関して先学期習った事実は全て使ってよい．）

(ii) $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \chi_{\{t \geqq 0 \mid f(x) \geqq t\}}(t)\,dt$ を証明せよ．　ここで集合 A に対して $\chi_A(t)$ は $t \in A$ のとき 1，$t \notin A$ のとき 0 となる関数（集合 A の定義関数）とする．

(iii) (i) の μ を用いて $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqq t\})\,dt$ を証明せよ．

(iv) 次の変形は (iii) の公式を $f(x) = x$, $g(x) = 2\chi_{[-1,1]}(x)$ として用いたつもりであるが結果がおかしい．誤りの理由を簡潔に指摘せよ：(i) の μ について

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq t\}) = 2\int_{x \geqq t} \chi_{[-1,1]}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t > 1, \\ 2(1-t), & 0 \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$ となるから

$$0 = 2\int_{-1}^1 x\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq t\})dt = \int_0^1 2(1-t)\,dt = 1 \quad (?)$$

問２ (30)**.**　閉区間 $[0,1]$ 上の正値（特に $f(x) \neq 0$）なルベーグ可積分関数 $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}_{>0}$ について以下を証明せよ．Fubini の定理は証明無く用いてよい．

(i) $x, y \in [0,1]$ に対して $(f(x) - f(y))(\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(y)}) \leqq 0$.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \geqq 1$.

問３ (30)**.**　$(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を１次元ルベーグ測度空間（すなわち，$\mathcal{F}_1$ は閉区間 $[a,b]$, $a < b$, を全て含む最小の σ 加法族を完備化した集合族，μ_1 は $\mu_1([a,b]) = b - a$, $a < b$, を満たす $\mathcal{F}_1$ 上唯一の測度）とし，この空間に

$$0 \leqq a < b \text{ なる任意の } a, b \in \mathbb{R} \text{ に対して } \nu([-b,-a]) = \nu([a,b]) = e^{-a} - e^{-b}$$

を満たす測度 ν を定義する．（その存在と一意性は先学期のルベーグ測度の構成に同じなので認める．）以下に答えよ．

(i) ν の μ_1 に対する絶対連続部分のラドン・ニコディム密度 $\rho:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求めよ．

(ii) $\nu \ll \mu_1$ （ν が μ_1 に対して絶対連続であること）を証明せよ．

(iii) $\mu_1 \ll \nu$ か？ もしそうなら μ_1 の ν に対するラドン・ニコディム密度 $\sigma:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求め，もしそうでないなら，μ_1 を ν に対して Lebesgue 分解し，μ_1 の ν に対する絶対連続部分のラドン・ニコディム密度を求めよ．

解析学概論Ｂ２（測度論）　後期　中間試験　**略解**　　　2005/12/ 服部哲弥

問 1 $(10*4)$**.**

(i) $\mu(E)=\int_E g(x)\,dx$ で定義される μ は測度であることを証明せよ．
（可積分なので恒等的に無限大ではなく,）非負可測なので（任意の可測集合 E 上で定義されて）**非負値で**あり，積分の一般的性質からσ **加法性を持つので測度である．**

(ii) $f(x)=\int_0^\infty \chi_{\{t\geqq 0 \mid f(x)\geqq t\}}(t)\,dt$ を証明せよ．
f が非負値だから右辺は $\displaystyle\int_{[0,f(x)]} 1\,dt=f(x)$ となる．

(iii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx=\int_0^\infty \mu(\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\geqq t\})\,dt$ を証明せよ．
(i)(ii) と Fubini の定理と f の非負値性から左辺は

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty \chi_{\{t\geqq 0\mid f(x)\geqq t\}}dt\right)\mu(dx)=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_{\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\geqq t\}}(x)\mu(dx)\right)dt$$

となって右辺に等しい．

(iv) $f(x)=x$, $g(x)=2\chi_{[-1,1]}(x)$ としたとき，誤りを指摘せよ：(i) の μ について

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqq t\})=2\int_{x\geqq t}\chi_{[-1,1]}(x)\,dx=\begin{cases}0, & t>1,\\ 2(1-t), & 0\leqq t\leqq 1,\end{cases}$$ となるから

$$0=2\int_{-1}^1 x\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx=\int_0^\infty \mu(\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqq t\})\,dt=\int_0^1 2(1-t)\,dt=1\quad(?)$$

f が非負値関数でないから公式が成り立たない.（右辺は f の正の部分 f_+ からの寄与だけの値.）

問 2 $(15*2)$**.**　f が正値可積分のとき以下を証明せよ．

(i) $x,y\in[0,1]$ に対して $(f(x)-f(y))(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)})\leqq 0$.
$f(x)\geqq f(y)$ と $\dfrac{1}{f(x)}\leqq\dfrac{1}{f(y)}$ が同値なので与式は正にならない.

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\geqq 1$.　（院試問題集第 3 分冊 (H8 富山大 B5) より.）
前問の不等式を $[0,1]^2$ で積分して Fubini の定理を使うと

$$0\geqq 2-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1\frac{dy}{f(y)}-\int_0^1 f(y)\,dy\int_0^1\frac{dx}{f(x)}=2-2\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}.$$

問 3 $(10*3)$**.**　$0\leqq a<b$ なる任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して $\nu([-b,-a])=\nu([a,b])=e^{-a}-e^{-b}$ を満たす測度 ν を定義する．以下に答えよ．

(i) ν の μ_1 に対する絶対連続部分のラドン・ニコディム密度 $\rho\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を求めよ.
$\rho(x)=\dfrac{d\,\nu([a,x])}{dx}=e^{-x}$, $x\geqq 0$, および $\rho(x)=\dfrac{d\,\nu([-b,x])}{dx}=e^{x}$, $x\leqq 0$, から $\rho(x)=e^{-|x|}$.（実際，$0\leqq a<b$ のとき $\displaystyle\int_{[-b,-a]}\rho(x)\,dx=\int_{[a,b]}\rho(x)dx=\int_a^b e^{-x}dx=e^{-a}-e^{-b}$ となって，条件を満たし，測度の一意性からもこれが解と分かる.）

(ii) $\nu\ll\mu_1$ を証明せよ.
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\rho(x)\,dx=2\int_0^\infty e^{-x}\,dx=2$ 一方，$\nu(\mathbb{R})=\nu((-\infty,0))+\nu([0,\infty))=\nu([0,\infty))+\nu((0,\infty))=2(e^{-0}-0)=2$ なので，$\nu-\int\rho(x)\,dx=0$ だから（測度の連続性から途中の計算で適宜極限操作をしている），絶対連続な部分で尽きているので $\nu\ll\mu_1$.

(iii) $\mu_1\ll\nu$ か？
絶対連続で密度 $\sigma(x)=e^{|x|}$ である．実際，$\displaystyle\int_E\sigma(x)\nu(dx)=\int_E\sigma(x)\rho(x)\mu(dx)=\mu(E)$ となって，密度になっている．