解析学概論Ｂ２（測度論・ルベーグ積分論）　後期　期末試験

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2005/01/17 服部哲弥

以下，断らなければ $\int \cdot\, dx$ は 1 次元ルベーグ積分を表す.

問 1 (30)． $\mathbb{R}$ 上の点 0 に集中した単位分布 δ_0 （1 次元ボレル集合 B に対して $0 \in B$ ならば $\delta_0(B) = 1$，$0 \notin B$ ならば $\delta_0(B) = 0$ となる測度）は 1 次元ルベーグ測度に関して絶対連続でないことを証明せよ.

問 2 (30)． L^1 ノルム $\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ が有限な関数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の集合を L^1 とおき，$f \in L^1$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して $T(f)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{3(y-x)} f(y)\, dy$ とおくことで，関数 $T(f)$ を定義する（すなわち，関数を関数に写す写像 T を定義する）．以下を証明せよ.

(i) $f \in L^1$ のとき $T(f) \in L^1$ となる.（ $\left|\int g(y)\, dy\right| \leqq \int |g(y)|\, dy$ を用いてもよい.）

(ii) 任意の $f, g \in L^1$ に対して $\|T(f) - T(g)\|_{L^1} \leqq \dfrac{1}{3} \|f - g\|_{L^1}$ である.

(iii) $f_0 \in L^1$ に対して $f_n = T(f_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$, で定義された $\{f_n\}$ は L^1 ノルムに関するコーシー列である.（$\|\cdot\|_{L^1}$ に関して三角不等式が成り立つことは断りなく用いてよい.）

(iv) （L^1 が完備であることを既知とすれば）f_n の L^1 ノルムに関する極限 $f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n$ が存在するが，このとき $T(f_\infty) = f_\infty$, a.e., が成り立つ.

(v) $T(f) = f$, a.e., を満たす $f \in L^1$ は測度 0 の集合上の違いを無視すれば唯一つ前問の f_∞ だけである．つまり $g \in L^1$ も $T(g) = g$, a.e., を満たすならば $g = f_\infty$, a.e., である.

問 3 (30)． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $X_n:\ \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, と確率変数 $Y:\ \Omega \to \mathbb{R}$ に関して以下を証明せよ.

(i) X_n が Y に概収束すれば確率収束する.

(ii) X_n が Y に L^p 収束すれば確率収束する.

ただし，X_n が Y に確率収束するとは任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - Y| \geqq \epsilon\,] = 0$ が成り立つことを言う.（概収束は確率 1 の集合上で各点収束すること，L^p 収束は L^p ノルムに関する収束 $\lim_{n\to\infty} \|X_n - Y\|_{L^p} = 0$，を言う.）

問 4 (?)． （この問題に限り，質問に沿った，意味のある回答であれば，回答内容で点数は変わりません.）

(i) 希望の専門は何か？(具体的な研究テーマの希望がまだ無い場合は，代数・幾何・解析，程度のおおざっぱな希望や，４年ゼミの希望教員名などでも良い.）

(ii) この後期の講義は上記希望に関して役立ったか？役だった場合は，どのテーマが特に役立ったか（Fubini，Radon–Nikodym，L^p 空間，確率論），役立たなかった場合は，どこが不満か，を記せ.

解析学概論Ｂ２（測度論）　後期　期末試験　**略解**　　2006/01/18 服部哲弥

問 1 (30)**.**　単位分布 δ_0 は 1 次元ルベーグ測度に関して絶対連続でないことを証明せよ.

絶対連続なら $\mu_1(A) = 0$ なる任意のボレル集合 A に対して $\delta_0(A) = 0$ のはずだが, $A = \{0\}$ が凡例となるので絶対連続ではない.（別解多数可能.）

問 2 $(6*5)$**.**　$T(f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{3(y-x)} f(y)\,dy$ で $T:\ L^1 \to L^1$ を定義する.

(i) $f \in L^1$ のとき $T(f) \in L^1$.

（途中でフビニの定理を使うと,）$\|T(f)\| = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{x} e^{3(y-x)} f(y)\,dy \right| dx$

$\leqq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{x} dy e^{3y-3x} |f(y)| = \int_{\mathbb{R}} dy e^{3y} |f(y)| \int_{y}^{\infty} e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}\|f\| < \infty.$

(ii) $\|T(f) - T(g)\| \leqq \dfrac{1}{3}\,\|f - g\|$.

前問の証明の f を $f - g$ に置き換えれば, $T(f-g) = T(f) - T(g)$（T は線型演算子）なので主張が成り立つ.

(iii) $f_n = T^n(f_0)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, はコーシー列.

$\|f_{k+1} - f_k\| = \|T(f_k) - T(f_{k-1})\| \leqq \dfrac{1}{3}\|f_k - f_{k-1}\| \leqq \cdots \leqq 3^{-k}\|f_1 - f_0\|$ に注意して,

$n > m$ のとき, $\|f_n - f_m\| \leqq \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\| \leqq \frac{3}{2} 3^{-m+1} \|f_2 - f_1\| \to 0,\ n, m \to \infty.$

(iv) $f_\infty = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n$ in L^1, について, $T(f_\infty) = f_\infty$, a.e..

$\|T(f_\infty) - f_\infty\| \leqq \|T(f_n) - T(f_\infty)\| + \|T(f_n) - f_n\| + \|f_n - f_\infty\| \leqq \dfrac{4}{3}\|f_n - f_\infty\| + \|f_{n+1} - f_n\|$. f_n は f_∞ に L^1 収束し, L^1 ノルムに関するコーシー列だから右辺はいくらでも小さくなる. よって $\displaystyle\int |T(f_\infty)(x) - f_\infty(x)|\,dx = 0$ だから, 主張が成り立つ.

(v) $T(f) = f$, a.e., を満たす $f \in L^1$ は測度 0 での違いを除いてただ一つ.

g も満たすと $\|f - g\| = \|T(f) - T(g)\| \leqq \frac{1}{3}\|f - g\|$ から $\|f - g\| = 0$ だから.

（問題と無関係だが, 線型演算子なので 0 が固定点になり, これが唯一の固定点なので f_∞ は恒等的に 0 である. 普通はこんな当たり前の結果を得るのに縮小写像の原理など使わない！）

問 3 $(15*2)$**.**

(i) X_n が Y に概収束すれば確率収束する.

任意の $\epsilon > 0$ に対して, 優収束定理と概収束の仮定から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - Y| \geqq \epsilon\,] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,\chi_{|X_n - Y| \geqq \epsilon}\,] = \mathrm{E}[\,\lim_{n\to\infty} \chi_{|X_n - Y| \geqq \epsilon}\,] = 0$

が成り立つので主張が成り立つ.

(ii) X_n が Y に L^p 収束すれば確率収束する.

任意の $\epsilon > 0$ に対して, チェビシェフの不等式から

$\epsilon^p \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - Y| \geqq \epsilon\,] \leqq \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|X_n - Y|^p\,] = 0$

が成り立つので主張が成り立つ.

問 4 (?)**.**　都合により解答例を省略します.