

確率論 2000年度第1回試験について

2000/11/29

服部哲弥

12/13 (水曜) 09:30–11:00 (時間帯に注意!) に通常の講義室 309 で第1回試験を行う。持ち込みなし。

机一つにつき2人以内で、机の中央の席は使わず端に着席すること。

試験範囲は講義の始めから収束の定義までの講義範囲および対応する演習問題集の問題、を原則とするが、特に、以下が予想される。

- (i) 演習問題 [19]–[36] の中の1問(またはそれを減らしたもの)。
- (ii) 演習問題 [1]–[36] の問題の類題または派生問題。
- (iii) 講義及び演習の証明問題(期待値の基礎的な不等式, 確率変数の種々の収束概念の間の関係)。

なお, 以上の予想は諸君の勉強の便宜のために発表した。裏をかくつもりはないが, 不慮の事態によって予告なしに変更があり得る。正式の試験範囲は, あくまで当該の講義と教科書の範囲全部である。

公平感を損なわないため, レポートや救済目的試験などの試験後の情状酌量の申し出は受け付けない。不可抗力による試験欠席の場合は, 文書による証明を服部まで提出すること。このとき, 何らかの対処が妥当と判断される場合でも, 無理を押しして正規の時間に受験する諸君との公平のため, 単位取得最低点に相当する点を上限とする。

間違った採点の訂正は行うので, 疑問のある場合は問い合わせさせていただきたい。但し, ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない。

講義録, 演習問題集の訂正は講義中に行ったが, ホームページ(URLは下記)の下, /講義/確率論/訂正 のページにもまとめてあるので, 欠席した諸君は必ず確認しておいてほしい。

なお, 12月20日は休講とする。

服部哲弥

URL: <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/>

問い合わせ先: hattori@math.nagoya-u.ac.jp

確率論 第1回試験

2000/12/13 服部哲弥

問1, 問2, 問3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ.

問1 (10 * 3 = 30). 実数 \mathbb{R} 上のボレル集合族 \mathcal{B}_1 に対して, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ 上の確率測度の列 $P_n, n = 1, 2, 3, \dots$, を次で定義する.

$$P_n[A] = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} \in A, \\ 0 & \frac{1}{n} \notin A. \end{cases}$$

- (i) P_n は $n \rightarrow \infty$ のとき弱収束することを定義に基づいて証明せよ. 極限測度 P は何か?
- (ii) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n[F] < P[F]$ となる閉集合 F があることを証明せよ.
- (iii) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n[G] > P[G]$ となる開集合 G があることを証明せよ.

問2 (10 * 3 = 30). 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ で, その分布が平均 $m \in \mathbb{R}$, 分散 $v > 0$ の正規分布

$$P[X \in A] = \int_A e^{-(x-m)^2/(2v)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v}}, \quad A \in \mathcal{B}_1,$$

に従うものを考える. X の母関数 $M(t) = E[e^{tX}]$, $t \in \mathbb{R}$, から $P[X > x]$ の漸近形 ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \log P[X > x] = 1$ となるような簡単な形の関数 h のこと) を求めることに関して, 以下に答えよ.

- (i) $M(t)$ を計算せよ. ガウス積分の公式 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2v)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v}} = 1$ を用いてもよい.
- (ii) $0 < \alpha < 1$ とする. $x < 0$ における $-t^\alpha$ ($t > 0$) のルジャンドル変換 $g_\alpha(x) = \sup_{t > 0} (xt + t^\alpha)$ を計算せよ.
- (iii) 2つの実数 $c > 0$ および $0 < \alpha < 1$ がとれて $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log M(\lambda^{1-\alpha}) = g_\alpha(-c)$ が成り立つならば $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \log P[X > y^\alpha] = -c$ となることが知られている. このことを用いて $\log P[X > x]$ の $x \rightarrow \infty$ における漸近形を求めよ.

問3 (20 * 2 = 40). 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) において以下に答えよ.

- (i) 確率変数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ がある $c > 0$ に対して $E[e^{cX^2}] < \infty$ を満たすならば $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \log P[X > x] \leq -c$ が成り立つことを証明せよ. 但し, $P[X > x] = 0$ となる x がある場合は左辺は $-\infty$ と定義する.
- (ii) 確率変数の列 $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$, と確率変数 $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に関して, X_n が Y に概収束すれば確率収束もすることを証明せよ.

問1 (10 * 3 = 30) . $P_n[A] = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} \in A, \\ 0 & \frac{1}{n} \notin A. \end{cases}$ について .

(i) P_n は $n \rightarrow \infty$ のとき弱収束することを定義に基づいて証明せよ . 極限測度 P は何か ?

有界連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して , ルベグ積分の定義から $\int_{\mathbb{R}} f(x)P_n[dx] = f(1/n)$ となるから ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)P_n[dx] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = f(0).$$

最後の変形で f が連続であることを用いた . 0 に集中した単位分布を $\delta_0(dx)$ と書くと 右辺は $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_0[dx]$ と書けるから , P_n は $P = \delta_0$ に弱収束する .

(ii) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n[F] < P[F]$ となる閉集合 F があることを証明せよ .

$F = \{0\}$ ととると , 定義から $P_n[F] = 0, n = 1, 2, 3, \dots$. 他方 $P[F] = \delta_0[F] = 1$ だから , 求める性質を持つ .

(iii) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n[G] > P[G]$ となる開集合 G があることを証明せよ .

$G = (0, 1)$ ととると , 上と同様に求める性質を持つことがわかる .

問2 (10 * 3 = 30) . 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ で , その分布が平均 $m \in \mathbb{R}$, 分散 $v > 0$ の正規分布に従うものを考える . X の母関数 $M(t) = E[e^{tX}]$, $t \in \mathbb{R}$, から $P[X > x]$ の漸近形を求めることに関して , 以下に答えよ .

(i) $M(t)$ を計算せよ .

$M(t) = \int e^{-(x-m)^2/(2v)+tx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v}}$ の指数部を平方完成してガウス積分の公式を用いると $M(t) = e^{mt+vt^2/2}$ を得る .

(ii) $0 < \alpha < 1$ とする . $x < 0$ における $-t^\alpha$ ($t > 0$) のルジャンドル変換 $g_\alpha(x) = \sup_{t>0}(xt + t^\alpha)$ を計算せよ .

$p(t) = xt + t^\alpha$ とおくと , $p'(t) = x + \alpha t^{\alpha-1}$ だから $x < 0, 0 < \alpha < 1$ なので $t = (-x/\alpha)^{-1/(1-\alpha)}$ で $p(t)$ は最大値

$$g_\alpha(x) = (1 - \alpha) \left(\frac{-x}{\alpha} \right)^{-\alpha/(1-\alpha)}$$

をとる .

(iii) $\log P[X > x]$ の $x \rightarrow \infty$ における漸近形を求めよ .

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{1/(1-\alpha)}} \log M(t) = g_\alpha(-c)$ に上で求めた結果を代入すると ,

$$\frac{v}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)} = (1 - \alpha) \left(\frac{c}{\alpha} \right)^{-\alpha/(1-\alpha)}$$

を得る . これが $c > 0$ に対して成り立つのは $\alpha = 1/2$ かつ $c = \frac{1}{2v}$ のとき . よって問題

に与えられた事実から $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \log P[X > x] = -\frac{1}{2v}$ を得る . すなわち $\log P[X > x]$

の漸近形は $\log P[X > x] \asymp -\frac{x^2}{2v}$.

なお，試験とは無関係だが，問題に与えられた事実（指数型 Tauber 定理）そのものについては，講義録の補遺の中の指数型 Tauber 型定理の節を参照のこと（そこの記号との対応は $\mu = P \circ X^{-1}$, $\phi(x) = x^\alpha$, $A_1 = A_2 = -c$.）
 また，問 3(i) との関係は各自検討していただきたい．

問 3 (20 * 2 = 40) .

(i) 確率変数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ がある $c > 0$ に対して $E[e^{cX^2}] < \infty$ を満たすならば $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \log P[X > x] \leq -c$ が成り立つことを証明せよ．但し， $P[X > x] = 0$ となる x がある場合は左辺は $-\infty$ と定義する．

$x \geq 0$ とする．チェビシエフの不等式から $P[X > x] \leq e^{-cx^2} E[e^{cX^2}]$. よって，
 $\frac{1}{x^2} \log P[X > x] \leq \frac{1}{x^2} \log E[e^{cX^2}] - c$ なので，主張が成り立つ．

(ii) X_n が Y に概収束すれば確率収束もすることを証明せよ．

$X_n \rightarrow Y$, a.e., だから任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\bigcap_{j=n}^{\infty} |X_j - Y| < \epsilon\right] = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} |X_j - Y| < \epsilon\right] = 1.$$

これと $\bigcap_{j=n}^{\infty} \{|X_j - Y| < \epsilon\} \subset \{|X_n - Y| < \epsilon\}$ から

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - Y| < \epsilon] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\bigcap_{j=n}^{\infty} \{|X_j - Y| < \epsilon\}\right] = 1.$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - Y| < \epsilon] = 1$ となって確率収束する．