確率論　2000年度第2回(最終)試験について

2001/ 1/10
服部哲弥

1/24 (水曜) 09:30–11:30 （時間帯に注意！）に通常の講義室 309 で第2回(最終)試験を行う．持ち込みなし．

机一つにつき2人以内で，机の中央の席は使わず端に着席すること．

試験範囲は特性関数以降の講義範囲（特性関数の定義，弱収束との関係，独立性，独立確率変数列の和の極限定理）および対応する演習問題集の問題 ([37]–[72])，を原則とするが，特に，以下が予想される．

- 演習問題集 §2.4 ([45]–[53])， §3.1 ([54]–[62])， §3.2 ([63]–[72]) のそれぞれから1問ずつ．多少の改変あり．問題集の2問から小問1問ずつ選んで試験の1問とするなどの操作もあり.（演習で触れなかった問題については，教科書に略解のある問題もあるので勉強するときに参考にしていただきたい.）

なお，予想は諸君の勉強の便宜のために発表した．裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって予告なしに変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで当該の講義と教科書の範囲全部である．

成績は，第1回 (中間) 試験と第2回 (期末) 試験を主にし，これに，演習問題の発表と，講義や演習における積極的な姿勢（講義録・演習問題集の訂正の指摘等を含む）を加味する．2回の試験については，両者の比重はほぼ対等と考え，良い成績はいつも良い点数を取る者に与えるべきである，公平感を損なわない，という考えに沿って成績に参入する．ただし，これまでの経験に照らして，以上を確定とはせず，成績はすべての試験採点終了後に決定する．

公平感を損なわないため，レポートや救済目的試験などの試験後の情状酌量の申し出は受け付けない．不可抗力による試験欠席の場合は，文書による証明を服部まで提出すること．このとき，何らかの対処が妥当と判断される場合でも，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため，単位取得最低点に相当する点を上限とする．

間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

講義録，演習問題集の訂正は講義中に行ったが，ホームページ (URL は下記) の下，　／講義／確率論／訂正　のページにもまとめてあるので，欠席した諸君は必ず確認しておいてほしい．

服部哲弥
URL: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/
問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp

確率論　第２回試験

2001/ 1/24 服部哲弥

問１，問２，問３，問４ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

問１ $(15 * 2 = 30)$**．**

(i) $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ を特性関数とする１次元分布はどのような分布か？

(ii) 実数値確率変数 X の特性関数を φ とするとき，$|\varphi|^2$ はどのような確率変数の特性関数か？

問２ $(20 * 2 = 40)$**．**

(i) $0 < p < 1$ を定数とする．$X_k,\ k = 1, \cdots, n,$ を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1 = 0\ ] = 1 - p,\ \mathrm{P}[\ X_1 = 1\ ] = p$ なる分布を持つものとする．このとき $\dfrac{1}{a_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - b_k)$ の分布が $n \to \infty$ で正規分布 $N(0, 1)$ に弱収束するような数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を一組与えよ (なるべく簡単な具体例を挙げよ).

(ii) 上で求めた $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して，数列 $\{c_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0$ を満たすとき，$\dfrac{1}{c_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - b_k)$ の分布は $n \to \infty$ で確率測度に弱収束するか？弱収束するならばその証明と極限分布を答えよ．弱収束しないならばそのことを証明せよ．

問３ (30)**．**　独立確率変数列 $X_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots,$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} X_k = 0$, a.e., と $(\forall \epsilon > 0)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] < \infty$ が同値であることを証明せよ．

問４ (?)．　以下のいずれか該当するほうに答えよ．

(i) **講義に半分より多く出席した諸君．**　講義（教官）を「採点」せよ．即ち，良かったと思う点と（教官が）改善すべきだと思う点を各１つ以上挙げよ．

(ii) **講義のうち半分以下しか出席しなかった諸君．**　出席の少なかった理由と，試験のためにどのように勉強したかを答えよ．(半分くらい出席の場合は (ii) を選ぶこと．採点は回答者の実体験に基づく特徴が感じられるかどうかを基準とする.）

問1 $(15 * 2 = 30)$.

(i) $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ を特性関数とする 1 次元分布はどのような分布か？

（教科書 問題五.3. 演習問題集 [20000923–45(1)]）$[-1, 1]$ 上の一様分布の特性関数は,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{-1}xt}\,dx = \frac{e^{\sqrt{-1}t} - e^{-\sqrt{-1}t}}{2\sqrt{-1}t} = \varphi(t)$$

となるので，求める分布である．(一様分布の特性関数であることを忘れた場合は，Lévy の反転公式で強引に求める．この場合，正則関数の複素積分と読み直して，積分路を変更し，留数定理に持ち込む.）

(ii) 実数値確率変数 X の特性関数を φ とするとき，$|\varphi|^2$ はどのような確率変数の特性関数か？

（教科書 問題五.2. 演習問題集 [20000923–46(2)]）Y を X と独立同分布な確率変数とし，$\varphi_{X-Y}(t) = \mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}(X-Y)t}\ ]$, $t \in \mathbb{R}$, を $X - Y$ の特性関数とすると，$t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_{X-Y}(t) = \mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}Xt}\ ]\mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}Yt}\ ] = |\varphi(t)|^2$ となるので，$|\varphi|^2$ は $X - Y$ の特性関数である．

問2 $(20 * 2 = 40)$.　　演習問題集 [20000923–66,68]

(i) $0 < p < 1$ を定数とする．X_k, $k = 1, \cdots, n$, を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1 = 0\ ] = 1 - p$, $\mathrm{P}[\ X_1 = 1\ ] = p$ なる分布を持つものとする．このとき $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布が $n \to \infty$ で正規分布 $N(0, 1)$ に弱収束するような数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を一組与えよ (なるべく簡単な具体例を挙げよ).

$a_n = \sqrt{n\mathrm{V}[\ X_1\ ]} = \sqrt{np(1-p)}$, $b_n = \mathrm{E}[\ X_1\ ] = p$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, とおくと，中心極限定理から $\displaystyle\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布は $N(0, 1)$ に弱収束する．

(ii) 上で求めた $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して，数列 $\{c_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ を満たすとき，$\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布は $n \to \infty$ で確率測度に弱収束するか？弱収束するならばその証明と極限分布を答えよ．弱収束しないならばそのことを証明せよ．

$a_n = \sqrt{np}$ だから $1/c_n = o(n^{-1/2})$. $\displaystyle\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - p)$ の特性関数を φ_n とおくと，

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-p)}\ ] = \mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}t(X_1-p)/c_n}\ ]^n \\ &= ((1-p)e^{-\sqrt{-1}tp/c_n} + pe^{\sqrt{-1}t(1-p)/c_n})^n = (1 + o(n^{-1}))^n = 1 + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

となって，t の各点で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = 1$ が成り立つ．よって $\displaystyle\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布は原点に集中した単位分布 δ_0 に弱収束する．(上の問で異なる例を与えても，この問の解答方針は変わらない.）

問3 (30).　　独立確率変数列 X_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$, に対して $\lim_{k\to\infty} X_k = 0$, a.e., と $(\forall\epsilon > 0)\ \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] < \infty$ が同値であることを証明せよ.

（教科書 問題六.2. 演習問題集 [20000923–60]）$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] = \infty$ となる $\epsilon > 0$ が存在すれば，ボレル－カンテリの第2定理より $\displaystyle\varlimsup_{k\to\infty}|X_k| \geq \epsilon$, a.e., となるので，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}X_k = 0$, a.e., ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] < \infty$, $\epsilon > 0$, である．逆に，$(\forall\epsilon > 0)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] < \infty$ ならば，ボレル－カンテリの第1定理より $(\forall\epsilon > 0)\ \displaystyle\varlimsup_{k\to\infty}|X_k| \leqq \epsilon$, a.e., となって，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}X_k = 0$, a.e..

問4 (?).　　都合により解答例を省略する.