確率論　期末試験

問 1，問 2，問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2003/07/17 服部哲弥

問 1 $(20 * 2)$**.**　以下の問に答えよ．

(a) 確率変数列 $X_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots,$ が確率変数 Y に L^1 収束すれば確率収束もすることを証明せよ．

(b) $[0, 1]$ 上の一様分布（ルベーグ測度）を確率測度とする確率空間の上の確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots,$ であって，恒等的に 0 という確率変数に確率収束するが L^1 収束しない例を挙げよ．

問 2 $(10 * 5)$**.**　$X_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots,$ を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1 = 1\ ] = \mathrm{P}[\ X_1 = -1\ ] = \dfrac{1}{2}$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(a) X_k の期待値 $\mathrm{E}[\ X_k\ ]$ と分散 $\mathrm{V}[\ X_k\ ]$ を求めよ．

(b) $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n = 1, 2, 3, \cdots,$ とおくとき，その母関数 $M_n(t) = \mathrm{E}[\ e^{tW_n}\ ]$ を計算せよ．

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n(\frac{t}{\sqrt{n}})$ を計算せよ．

(d) Y を標準正規分布に従う確率変数とするとき $\mathrm{E}[\ e^{tY}\ ]$ を計算せよ．

(e) 中心極限定理によれば，有界連続関数 f に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\ f(\frac{1}{\sqrt{n}} W_n)\ ] = \mathrm{E}[\ f(Y)\ ]$ が成り立つ．この式において $f(x) = e^{tx}$ とおくことで中心極限定理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \mathrm{E}[\ e^{tY}\ ]$ と計算してよいか否か？理由をつけて簡潔に答よ．

問 3 (20)**.**　下記の 10 個の語句を用いて 大数の強法則と中心極限定理を比較した簡単な説明の文書を作れ． 「確率変数の個数と和の増大度の関係」はこの趣旨への言及を含めばこの通りの語句でなくてもよい．

語句

概収束　　**法則収束**　　**特性関数**　　**大数の強法則**　　**中心極限定理**

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}[\ X_k\ ])$　　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}[\ X_k\ ])$

独立同分布確率変数列 X_k**,** $k = 1, 2, 3, \cdots$

４次モーメント有限の場合には証明が容易

確率変数の個数と和の分布の増大度の関係

記号

以下の記号はこの講義だけの約束であるが，答案で断りなく使ってかまわない．

$\mathbb{R}_+$**：** 非負実数の集合.

$\mathcal{B}_1$**：** $\mathbb{R}$ 上のボレル σ 加法族（開集合を全て含む最小の σ 加法族）.

Ω **の部分集合** A **の指示関数** χ_A**：** $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$ で定義される $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$.

（Ω は任意の集合でよい.）

確率変数を用いて条件付けられた事象の確率： 例えば，確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ と実数 a に対して $\mathrm{P}[\, X \geqq a \,]$ は $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqq a\}$ という事象（可測集合）の確率を表す.

共通部分はコンマで区切る．例えば $\mathrm{P}[\, X \geqq a,\ Y \leqq b \,]$ は2つの事象 $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqq a\}$ と $B = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leqq b\}$ の共通部分の確率 $\mathrm{P}[\, A \cap B \,]$ を表す.

定義

期待値： $\mathrm{E}[\, X \,] = \displaystyle\int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{P}[\, d\omega \,]$

分散： $\mathrm{V}[\, X \,] = \mathrm{E}[\, (X - \mathrm{E}[\, X \,])^2 \,]$

概収束： $\mathrm{P}[\, \displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = Y \,] = 1$

L^p **ノルム：** $\|X\|_p = \mathrm{E}[\, |X|^p \,]^{1/p}$

L^p **収束：** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|X_n - Y\|_p = 0$

確率収束： $(\forall \epsilon > 0)\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\, |X_n - Y| \geqq \epsilon \,] = 0$

法則収束： 全ての有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, f(X_n) \,] = \mathrm{E}[\, f(Y) \,]$

公式

以下の公式は成り立つための条件を明示していないので，答案で用いる際は成立条件を理解していることが分かるように書くこと．

確率と期待値： $\mathrm{P}[\, X \geqq a \,] = \mathrm{E}[\, \chi_{\{X \geqq a\}} \,]$

チェビシェフの不等式： $\mathrm{E}[\, f(X) \,] \geqq f(x)\mathrm{P}[\, X \geqq x \,]$

イェンセンの不等式： $f(\mathrm{E}[\, X \,]) \leqq \mathrm{E}[\, f(X) \,]$

ミンコフスキーの不等式： $\|X + Y\|_p \leqq \|X\|_p + \|Y\|_p$

ヘルダーの不等式： $\mathrm{E}[\, |XY| \,] \leqq \|X\|_p \|Y\|_q \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$

微積分学から：

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\cosh t = 1 + \dfrac{1}{2}t^2 + O(t^4)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

確率論　期末試験　**略解**　　　　　　　　2003/07/18 服部哲弥

問1 $(20*2)$**.**
(a) $X_n,\ n=1,2,3,\cdots,$ が Y に L^1 収束すれば確率収束もすることを証明せよ.
　$|x|$ は非負だからチェビシェフの不等式から $\epsilon>0$ に対して

$$\epsilon \mathrm{P}[\ |X_n-Y| \geqq \epsilon\ ] \leqq \mathrm{E}[\ |X_n-Y|\ ].$$

仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\ |X_n-Y|\ ]=0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ |X_n-Y| \geqq \epsilon\ ]=0$，すなわち確率収束する.
(b) $[0,1]$ 上の一様分布（ルベーグ測度）を確率測度とする確率空間の上の確率変数列 $X_n,\ n=1,2,3,\cdots,$ であって，0 に確率収束するが L^1 収束しない例を挙げよ.
　例えば $X_n=n\chi_{(0,1/n]},\ n=1,2,3,\cdots,$ とおくと，0 に各点収束するので確率収束するが，$\|X_n\|_1=1,\ n=1,2,3,\cdots,$ なので 0 に L^1 収束しない.

問2 $(10*5)$**.**　$X_k,\ k=1,2,3,\cdots,$ を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1=1\ ]=\mathrm{P}[\ X_1=-1\ ]=\dfrac{1}{2}$ を満たすとする.
(a) $\mathrm{E}[\ X_k\ ]=1\times 0.5+(-1)\times 0.5=0$，$\mathrm{V}[\ X_k\ ]=1^2\times 0.5+(-1)^2\times 0.5=1.$
(b) $\displaystyle W_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n=1,2,3,\cdots,$ とおくとき，その母関数 $M_n(t)=\mathrm{E}[\ e^{tW_n}\ ]$ を計算せよ.
　乗法定理と同分布であることから $M_n(t)=\mathrm{E}[\ e^{tX_1}\ ]^n=(\cosh t)^n.$
(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n(\frac{t}{\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{t^2}{2n}+O(\frac{1}{n^2}))^n=e^{t^2/2}$.
(d) Y を標準正規分布に従う確率変数とするとき $\mathrm{E}[\ e^{tY}\ ]$ を計算せよ.
　$\displaystyle \mathrm{E}[\ e^{tY}\ ]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2n}}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}\frac{dy}{\sqrt{2n}}e^{t^2/2}=e^{t^2/2}.$
(e) 中心極限定理によれば，有界連続関数 f に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\ f(\frac{1}{\sqrt{n}}W_n)\ ]=\mathrm{E}[\ f(Y)\ ]$ が成り立つ. この式において $f(x)=e^{tx}$ とおくことで中心極限定理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n(\frac{t}{\sqrt{n}})=\mathrm{E}[\ e^{tY}\ ]$ と計算してよいか否か？理由をつけて簡潔に答よ.
　$t\neq 0$ のとき $f(x)=e^{tx}$ は有界でないのでこの計算は正しくない.（結論は「偶然」正しいが，中心極限定理（法則収束）以外の論拠を要する.）

問3 (20)**.**　大数の強法則と中心極限定理を比較した簡単な説明の文書を作れ.
　解答例：大数の強法則も中心極限定理も確率変数の和が変数の個数とともにどのように増大するかを示す定理であって，**独立同分布確率変数列** $X_k,\ k=1,2,3,\cdots,$ に対してそれぞれ適当な仮定の下に，**大数の強法則**は $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{E}[\ X_k\ ])$ が 0 に**概収束**するという主張，**中心極限定理**は $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{E}[\ X_k\ ])$ が**法則収束**して極限分布は正規分布になるという主張である.
　収束の種類も分母の n の指数も異なるので両者の証明は全く異なる. 中心極限定理は S_n の**特性関数**を考えて特性関数の収束が分布の弱収束を意味する事実を用いて証明する. 中心極限定理の S_n の分母に現れる $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{E}[\ X_k\ ])$ の n に関する**増大度** $n^{1/2}$ は正しい増大度なので証明には精密な評価が必要だが特性関数の指数の肩でテーラーの定理を用いることで評価を得る.
　大数の法則は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{E}[\ X_k\ ])$ の増大度が n に満たないことを主張する点では中心極限定理より弱いが，概収束なので特性関数を用いることはできない. 幸い，X_1 の **4 次**

モーメントが有限の場合には証明が容易である．中心極限定理によって S_n が収束することからその 4 乗を考えることで $\mathrm{E}\left[\ \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}[\ X_k\ ])\right)^4\ \right] = O(n^{-2})$，を得ることが期待できて左辺の n に関する級数が収束し，従って期待値をとる前の級数が概収束するので各項は 0 に概収束する，という直感を正当化する証明がある．